



# Une méthode Galerkin discontinue d'ordre élevé pour la propagation d'ondes sismiques en milieu viscoélastique

Fabien Peyrusse, Nathalie Glinsky, Céline Gélis, Stephane Lanteri

## ► To cite this version:

Fabien Peyrusse, Nathalie Glinsky, Céline Gélis, Stephane Lanteri. Une méthode Galerkin discontinue d'ordre élevé pour la propagation d'ondes sismiques en milieu viscoélastique. [Rapport de recherche] RR-8242, INRIA. 2013. <hal-00789682>

**HAL Id: hal-00789682**

**<https://hal.inria.fr/hal-00789682>**

Submitted on 18 Feb 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# Une méthode Galerkin discontinue d'ordre élevé pour la propagation d'ondes sismiques en milieu viscoélastique

Fabien Peyrusse, Nathalie Glinsky, Céline Gélis, Stéphane Lanteri

**RESEARCH  
REPORT**

**N° 8242**

February 2013

Project-Team Nachos





## Une méthode Galerkin discontinue d'ordre élevé pour la propagation d'ondes sismiques en milieu viscoélastique

Fabien Peyrusse<sup>\*†</sup>, Nathalie Glinsky<sup>\*‡†</sup>, Céline Gélis<sup>§</sup>, Stéphane Lanteri<sup>†</sup>

Équipe-Projet Nachos

Rapport de recherche n° 8242 — February 2013 — 42 pages

**Résumé :** Nous présentons une méthode Galerkin discontinue d'ordre élevé pour la simulation de la propagation d'ondes sismiques P-SV en milieu hétérogène et en deux dimensions d'espace. Le système vitesse-contraintes du premier ordre est obtenu en supposant un milieu linéaire, isotrope et viscoélastique, prenant ainsi en compte l'atténuation intrinsèque du milieu. La relation contraintes-déformations dans le domaine temporel étant une convolution, qui nécessiterait une approximation numérique très coûteuse, nous considérons la rhéologie d'un "generalized Maxwell body" (GMB) remplaçant la convolution par un jeu d'équations différentielles. Il en résulte un système vitesse-contraintes contenant des équations supplémentaires pour les fonctions anélastiques qui traduisent l'historique de déformation du matériau. Notre méthode numérique, applicable à des maillages triangulaires non structurés, est basée sur des flux centrés et un schéma saute-mouton en temps. L'extension en espace à l'ordre élevé est obtenue grâce à des polynômes de Lagrange, définis localement dans chaque élément. La méthode étant explicite, elle ne nécessite pas d'inversion de matrice de masse globale. La méthode est validée via des simulations numériques, notamment des comparaisons avec un schéma aux différences finies.

**Mots-clés :** méthode Galerkin discontinue, méthode d'ordre élevé, schéma saute-mouton, équation élastodynamique, formulation vitesse-contrainte, milieu viscoélastique

\* Ifsttar, Institut Français des Sciences et Technologies, des Transports, de l'Aménagement et des Réseaux, 58 Bd Lefebvre, 77732 Paris cedex 15

† Inria, Institut National de Recherche en Informatique et Automatique, BP 93, 06902 Sophia Antipolis cedex

‡ CETE, Laboratoire régional de Nice, 56 Bd Stalingrad, 06359 Nice cedex 4

§ IRSN, Institut de Radioprotection et de Sécurité Nucléaire, BP 17, 92262 Fontenay-aux-Roses cedex

RESEARCH CENTRE  
SOPHIA ANTIPOLIS – MÉDITERRANÉE

2004 route des Lucioles - BP 93  
06902 Sophia Antipolis Cedex

# A High-order Discontinuous Galerkin Method for Seismic Wave Propagation in Viscoelastic Media

**Abstract:** We present a high-order discontinuous Galerkin method for the simulation of P-SV seismic wave propagation in heterogeneous media and two dimensions of space. The first-order velocity-stress system is obtained by assuming that the medium is linear, isotropic and viscoelastic, thus considering intrinsic attenuation. The associated stress-strain relation in the time domain being a convolution, which is numerically intractable, we consider the rheology of a generalized Maxwell body replacing the convolution by differential equations. This results in a velocity-stress system which contains additional equations for the anelastic functions including the strain history of the material. Our numerical method, suitable for complex triangular unstructured meshes, is based on a centered numerical flux and a leap-frog time-discretization. The extension to high order in space is realized by Lagrange polynomial functions, defined locally in each element. The inversion of a global mass matrix is avoided since an explicit scheme in time is used and because of the local nature of the discontinuous Galerkin formulation. The method is validated through numerical simulations including comparisons with a finite difference scheme.

**Key-words:** discontinuous Galerkin method, high-order method, leap-frog scheme, elastodynamic equations, velocity-stress formulation, viscoelastic medium

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Modélisation</b>	<b>6</b>
2.1	Formulation du système pour un milieu élastique . . . . .	6
2.2	Prise en compte de l'atténuation . . . . .	7
2.3	Approximation des coefficients anélastiques . . . . .	9
2.4	Formulation du système pour un milieu viscoélastique . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Discrétisation</b>	<b>13</b>
3.1	Discrétisation spatiale . . . . .	13
3.2	Conditions aux limites . . . . .	17
3.2.1	Surface libre . . . . .	17
3.2.2	Bords absorbants . . . . .	17
3.2.3	Bords périodiques . . . . .	18
3.3	Discrétisation temporelle . . . . .	18
3.4	Implémentation de l'onde plane . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>19</b>
4.1	Propagation d'une onde plane dans une colonne de sol hétérogène . . . . .	19
4.2	Propagation dans le bassin de Nice . . . . .	25
4.2.1	Géométrie réaliste de bassin 2D hétérogène . . . . .	25
4.2.2	Influence de l'hétérogénéité du bassin, effets 2D et comparaisons avec les mesures de terrain . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>35</b>
	<b>Annexe : Caractéristiques de la méthode différences finies</b>	<b>41</b>

# 1 Introduction

La simulation numérique en sismologie est devenue en quelques décennies un moyen incontournable d'estimation du mouvement du sol grâce à des méthodes numériques de résolution de plus en plus précises, une meilleure compréhension des phénomènes physiques et des calculateurs toujours plus puissants. Dans des milieux de propagation réalistes, par exemple en présence de fortes topographies ou dans des bassins sédimentaires dans lesquels les ondes sont piégées, il est possible d'observer des effets de site causés par les conditions géologiques et géotechniques locales. Ces effets ont été décrits par Singh *et al.* [53] lors du séisme Michoacan du 19 septembre 1985 qui a occasionné une forte amplification et une augmentation de la durée du mouvement du sol dans la ville de Mexico, construite sur un ancien lac rempli d'alluvions. La fréquence de résonance du bassin a coïncidé, en de nombreux endroits, avec celle des bâtiments provoquant leur effondrement et la mort de plus de 20 000 personnes.

De nombreuses études numériques visent à modéliser la propagation des ondes sismiques dans des bassins sédimentaires afin d'évaluer l'amplification des ondes et l'allongement de la durée du signal liés à la présence d'ondes réfléchies, converties ou diffractées dans le bassin. Certaines d'entre elles se focalisent sur l'étude de grands bassins sédimentaires, aux Etats-Unis, au Japon ou en Nouvelle-Zélande (par exemple, Olsen et Archuleta [45], Satoh *et al.* [49], Komatitsch *et al.* [30], Benites et Olsen [2] ou Guidotti *et al.* [23]). D'autres étudient la propagation des ondes dans des bassins plus petits comme celui de Nice (Semblat *et al.* [51], Gélis *et al.* [21], Gandomzadeh [18]), de Grenoble (Chaljub *et al.* [10], Stupazzini *et al.* [55]) ou de Gubbio (Smerzini *et al.*, [54]) en Europe.

Pour une estimation précise du mouvement du sol dans de telles configurations géologiques, l'hypothèse d'un milieu de propagation linéaire élastique n'est absolument pas adaptée. Lorsque les ondes se propagent dans un milieu réel, une partie de l'énergie sismique est dissipée en raison des pertes anélastiques liées à la friction interne du matériau (Aki et Richards [1]). Ce phénomène n'est pas pris en compte dans la modélisation linéaire élastique ce qui conduit, dans tous les cas, à une surestimation de l'amplitude et de la durée des mouvements calculés en surface, même en l'absence d'effet de site.

En général, étant donné la taille des bassins sédimentaires, la topographie n'est pas prise en compte dans ces simulations numériques. Néanmoins, dans certains cas, la présence d'une topographie proche et marquée peut modifier notablement la réponse du bassin sédimentaire. Par exemple, Lee *et al.* [33] ont montré l'existence d'une interaction forte entre la réponse sismique des montagnes environnant le bassin de Taipei et celle du bassin lui-même. En particulier, selon la localisation de la source sismique, la topographie peut amplifier ou diminuer la réponse du bassin, illustrant ainsi la complexité de cette interaction.

Nous étudions ici la propagation des ondes P-SV en deux dimensions d'espace pour une topographie non plane. Pour cela, nous résolvons les équations de l'élastodynamique écrites sous forme vitesse-contraintes. Afin d'inclure l'atténuation du milieu, on peut supposer que celui-ci est linéaire, isotrope et viscoélastique combinant ainsi un comportement élastique et visqueux. Ainsi, la relation contrainte-déformation associée, exprimant le principe de causalité, traduit que la contrainte en un temps  $t$  est fonction de tout l'historique de la déformation jusqu'à ce temps. Lorsque cette relation est écrite dans le domaine temporel, elle nécessite l'approximation d'une convolution (de la fonction de relaxation et du taux de déformation), ce qui n'est pas envisageable d'un point de vue numérique car trop coûteux. Par conséquent, nous suivons les techniques proposées, d'une part, par Day et Minster [13] qui consiste à remplacer la convolution par une équation différentielle supplémentaire et, d'autre part, par Emmerich et Korn [16] considérant la rhéologie d'un modèle de Maxwell généralisé (*Generalized Maxwell body*, GMB) composé d'éléments de Maxwell (*Maxwell body*) élémentaires possédant  $L$  fréquences de relaxation, choisies

dans la bande de fréquences étudiée. En suivant cette approche, le système élastodynamique à résoudre contient des équations supplémentaires par rapport au cas élastique.

D'autres méthodes ont été utilisées pour prendre en compte l'atténuation. Une approche courante en éléments finis et éléments finis spectraux consiste à introduire un amortissement de Rayleigh. Semblat [50] cherche à donner un sens physique à cette approche et montre l'équivalence entre cette méthode et un modèle de Maxwell généralisé contenant un ressort simple et un modèle de Maxwell pour des valeurs d'amortissement faibles à modérées. D'autres modèles rhéologiques peuvent être utilisés, notamment les modèles de type Zener (Carcione *et al.* [7, 8]). Ces derniers sont équivalents aux GMB, comme l'ont récemment démontré Moczo et Kristek [41].

Plusieurs méthodes numériques ont été proposées pour résoudre les équations de l'élastodynamique. La plus ancienne et la plus populaire est sans aucun doute la méthode des différences finies (DF) qui n'a cessé d'être améliorée depuis le schéma initial, basé sur la grille cartésienne standard. Parmi les apports les plus importants, on peut citer l'introduction de la formulation hétérogène des différences finies, permettant de prendre en compte implicitement les conditions aux limites entre interfaces dans le milieu (Kelly *et al.* [28]), l'introduction du système vitesse-contraintes et des grilles décalées (*staggered grids*, Madariaga [37], Virieux [57]) adaptant ainsi le schéma de Yee [58], d'ordre deux en temps et espace, initialement établi pour les équations de Maxwell, aux équations de l'élastodynamique. Plus tard, Levander [34] propose une extension du schéma à l'ordre 4 et, Saenger *et al.* [48], une nouvelle grille en quinconce permettant de moyenniser spatialement les paramètres du milieu (densité, paramètres de Lamé) dans chaque maille numérique et de correctement modéliser les ondes de surface (*rotated staggered-grid*). Si la méthode DF est relativement simple d'implémentation et peu coûteuse, son principal défaut est d'utiliser une grille cartésienne rendant moins précise l'approximation de la topographie de surface ou des courbures dans le milieu. Robertsson [47] et Ohminato et Chouet [43] ont étudié la manière d'introduire efficacement les conditions de surface libre (contraintes normales à la surface nulles) dans le schéma *staggered-grid* de différences finies. Avec le schéma de Saenger *et al.* [48], l'introduction de la surface libre, basée sur un milieu fictif dans lequel la vitesse des ondes est nulle (conditions *vacuum*, Zahradnik [59]) nécessite d'utiliser des maillages très fins augmentant le coût de calcul (25 à 30 points par longueur d'onde minimale de Rayleigh pour une topographie parallèle à l'axe horizontal du maillage cartésien, 60 points par longueur d'onde en présence d'une topographie non plane, Bohlen et Saenger [5]). D'autres méthodes ont été développées comme les méthodes éléments finis (EF) (Lysmer et Drake [36], Marfurt [38], Semblat et Pecker [52]) applicables à des maillages en triangles ou tétraèdres mieux adaptés aux géométries complexes et permettant une approximation précise de la condition de surface libre. Cependant, elle nécessitent l'inversion, à chaque pas de temps, d'une matrice de masse globale, ce qui limite leur application à des degrés d'interpolation relativement faibles. L'introduction des méthodes éléments finis spectraux (EFS), basées sur des formules de quadratures de Gauss-Lobatto-Legendre a permis de lever cette limitation (Komatitsch et Vilotte [31], Chaljub *et al.* [9], Mercerat *et al.* [39]). En revanche, ces méthodes sont, pour la plupart, basées sur des maillages quadrangulaires ou hexaédriques, ce qui peut être un inconvénient, l'utilisation de maillages triangulaires ou tétraédriques permettant une meilleure approximation des hétérogénéités du milieu. Pour toutes ces raisons, nous proposons une méthode Galerkin discontinue d'ordre élevé appliquée à des maillages triangulaires.

La méthode Galerkin discontinue (GD) a été introduite dans les années 70 par Reed et Hill [46] pour la solution de problèmes de transport de neutrons. Elle connut un regain d'intérêt il y a une vingtaine d'années pour la résolution de problèmes hyperboliques, notamment en électromagnétisme. Malgré son succès pour de nombreuses applications, elle fut relativement peu appliquée à la propagation des ondes sismiques. Dans le cas linéaire élastique, on peut citer les travaux de Käser et ses coauteurs (par exemple, Käser et Dumbser [25], Käser *et al.* [27]), Delcourte *et al.* [14] ou Etienne *et al.* [17]. Dans le cas de milieux viscoélastiques, Käser *et al.*



[26] proposent une méthode GD utilisant des flux décentrés et l'approche ADER qui consiste à exprimer l'approximation des dérivées en temps par des dérivées en espace afin d'obtenir automatiquement un schéma ayant le même ordre de précision en temps et en espace. Nous proposons ici une méthode GD d'ordre élevé relativement différente puisque basée sur des flux centrés ainsi qu'un schéma saute-mouton; ceci constitue une extension du schéma introduit par Delcourte *et al.* [14] pour un milieu linéaire élastique.

Dans ce rapport, nous présentons, dans la section 2, les équations élastodynamiques pour un milieu linéaire élastique, le modèle physique d'atténuation utilisé ainsi que le système d'équations aux dérivées partielles obtenu dans le cas viscoélastique. Ensuite, section 3, nous décrivons en détails la discrétisation spatiale par la méthode GD, la discrétisation temporelle ainsi que le traitement numérique des conditions aux limites. Enfin, la méthode numérique est appliquée, section 4, à deux types de problèmes : le premier est la propagation d'une onde dans une colonne de sol hétérogène et permet une validation détaillée de notre approche; le second concerne un cas plus réaliste de propagation dans un bassin sédimentaire hétérogène en présence d'une topographie non plane. Dans les deux cas, les résultats de la méthode GD sont comparés à des solutions issues d'une méthode différences finies dont les caractéristiques sont précisées en annexe.

## 2 Modélisation

### 2.1 Formulation du système pour un milieu élastique

La propagation des ondes P-SV dans un milieu linéaire et isotrope est régie par les équations élastodynamiques qui s'écrivent, en formulation déplacement-contraintes et en absence de forces extérieures

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla \cdot \sigma, \quad (2.1)$$

où  $u$  est le vecteur déplacement,  $\sigma$  le tenseur des contraintes et  $\rho$  la masse volumique du milieu. Nous complétons cette équation par la loi de Hooke qui décrit le comportement du matériau dans le cas linéaire élastique isotrope et relie les contraintes aux déformations

$$\sigma = \lambda \operatorname{tr}(\epsilon) I + 2\mu \epsilon, \quad (2.2)$$

où  $\epsilon$  est le tenseur des déformations dont les composantes sont

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.3)$$

$I$  est la matrice identité;  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé reliés aux vitesses de propagation des ondes P et S dans le milieu par les relations

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \text{ et } v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (2.4)$$

Si l'on introduit le vecteur vitesse  $v = \partial_t u$  dans l'équation (2.1) et que l'on dérive la relation (2.2) en temps, on obtient la formulation vitesse-contraintes du premier ordre pour un milieu linéaire élastique

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= \nabla \cdot \sigma, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} &= \lambda (\nabla \cdot v) I + \mu (\nabla v + \nabla v^T). \end{cases} \quad (2.5)$$

## 2.2 Prise en compte de l'atténuation

Lorsque les ondes se propagent dans un milieu réel, une partie de l'énergie sismique est dissipée en raison de pertes anélastiques. Celles-ci sont liées à la friction interne du matériau (Aki et Richards [1]). Ce phénomène n'est pas pris en compte dans la modélisation linéaire élastique.

Une façon d'introduire l'atténuation intrinsèque du milieu consiste à supposer que le milieu de propagation n'est plus élastique mais viscoélastique, c'est-à-dire qu'il a un comportement à la fois élastique et visqueux. De ce fait, il n'est plus possible d'utiliser la loi de Hooke (2.2) reliant de façon linéaire les contraintes et les déformations mais, suivant le principe de causalité, la contrainte au temps  $t$  est fonction de tout l'historique de la déformation jusqu'à  $t$ , ce qui se traduit par la relation contraintes-déformations suivante

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t \phi_{ijkl}(t - \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \epsilon_{kl}(\tau) d\tau, \quad (2.6)$$

où  $\phi$  est le tenseur des fonctions de relaxation décrivant le comportement du matériau. Cette relation peut s'écrire aussi

$$\sigma_{ij}(t) = \phi_{ijkl}(t) * \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_{kl}(t), \quad (2.7)$$

où  $*$  est le symbole de convolution, ou encore

$$\sigma_{ij}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \phi_{ijkl}(t) * \epsilon_{kl}(t). \quad (2.8)$$

D'un point de vue numérique, l'utilisation directe des formules (2.7) ou (2.8) n'est pas envisageable à cause du coût en temps et en mémoire nécessaire pour l'approximation de la convolution. L'approche classique proposée par Day et Minster [13] consiste, tout d'abord, à remplacer la convolution dans le domaine temporel par une multiplication dans le domaine fréquentiel en utilisant une transformée de Fourier (TF). On définit la TF par

$$\mathcal{F}[f(t)] = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (2.9)$$

et la TF inverse par

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (2.10)$$

Sous des conditions appropriées - que nous supposons remplies -, ces deux fonctions existent et sont inverses l'une de l'autre, c'est-à-dire  $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}] = f$ . En posant

$$M = \mathcal{F}\left[\frac{\partial}{\partial t} \phi\right] = i\omega \mathcal{F}[\phi], \quad (2.11)$$

la TF de l'équation (2.8) est alors

$$\hat{\sigma}_{ij}(\omega) = M_{ijkl}(\omega) \hat{\epsilon}_{kl}(\omega), \quad (2.12)$$

où  $M_{ijkl}(\omega)$  sont les modules viscoélastiques, complexes et dépendant de la fréquence  $\omega$ .

Pour cette étude dans le domaine temporel et pour l'approximation par une méthode Galerkin discontinue, nous choisissons le modèle de Maxwell généralisé (GMB) combinant un ressort et  $L$

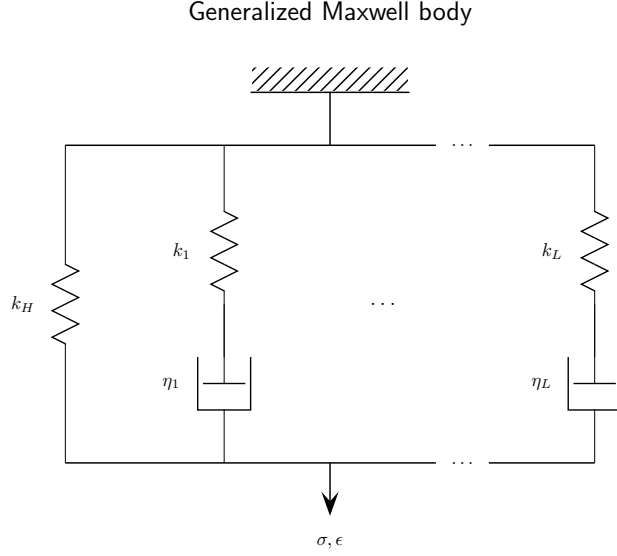


FIG. 1 – Modèle de Maxwell généralisé (GMB)

modèles de Maxwell, comme illustré figure 1, introduit par Emmerich et Korn [16]. En 1D, son module est

$$M(\omega) = k_H + \sum_{l=1}^L \frac{k_l i\omega}{\omega_l + i\omega}, \quad (2.13)$$

où l'on a noté  $k_H$  (resp.  $k_l$ ) le module d'élasticité du ressort simple (resp. du  $l$ -ème modèle de Maxwell),  $\eta_l$  la viscosité et  $\omega_l = k_l/\eta_l$  la fréquence de relaxation du  $l$ -ème modèle de Maxwell. Le module instantané (*unrelaxed modulus*)  $M^U$  est obtenu pour  $t \rightarrow 0$ , c'est-à-dire  $\omega \rightarrow +\infty$ . De même, on peut définir le module relaxé (*relaxed modulus*)  $M^R$  comme limite quand  $t \rightarrow +\infty$ , c'est-à-dire  $\omega \rightarrow 0$ . On a donc

$$M^U = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} M(\omega) = k_H + \sum_{l=1}^L k_l. \quad (2.14)$$

En définissant des coefficients anélastiques  $\Upsilon^{M,l} = k_l/M^U$ , (2.13) équivaut alors à

$$M(\omega) = M^U \left( 1 - \sum_{l=1}^L \frac{\Upsilon^{M,l} \omega_l}{\omega_l + i\omega} \right), \quad (2.15)$$

dont on déduit la relation suivante

$$\sigma(t) = M^U \left( \epsilon(t) - \sum_{l=1}^L \Upsilon^{M,l} \zeta^l(t) \right), \quad (2.16)$$

où l'on a introduit  $L$  fonctions anélastiques (également appelées *variables internes* ou *variables de mémoire*)

$$\zeta^l(t) = \omega_l \int_{-\infty}^t e^{-\omega_l(t-\tau)} \epsilon(\tau) d\tau, \quad (2.17)$$

qui vérifient les  $L$  équations différentielles suivantes

$$\frac{\partial}{\partial t} \zeta^l(t) + \omega_l \zeta^l(t) = \omega_l \epsilon(t). \quad (2.18)$$

Le passage à deux ou trois dimensions d'espace s'effectue en considérant autant de modules que nécessaire. Ainsi, dans le cas linéaire isotrope que nous étudions, on introduit deux modules, appelés  $\lambda$  et  $\mu$  par analogie avec le cas élastique. Reprenant la forme obtenue pour un module  $M$  quelconque, on a

$$\lambda(\omega) = \lambda^U \left( 1 - \sum_{l=1}^{L_1} \frac{\Upsilon^{\lambda,l} \omega_l}{\omega_l + i\omega} \right) \text{ et } \mu(\omega) = \mu^U \left( 1 - \sum_{l=1}^{L_2} \frac{\Upsilon^{\mu,l} \omega_l}{\omega_l + i\omega} \right). \quad (2.19)$$

Pour terminer cette description, précisons que les coefficients élastiques  $M^U$  utilisés dans le modèle sont déterminés à partir des vitesses de phase  $v(\omega)$  ( $v_s$  ou  $v_p$ ) que l'on suppose connues à une certaine fréquence de référence  $\omega_r = 2\pi f_r$  (Moczo *et al.* [40]). Sachant que

$$v(\omega) = \left( \operatorname{Re} \left[ \left( \frac{M(\omega)}{\rho} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \right)^{-1}, \quad (2.20)$$

on déduit de (2.15) que

$$M^U = \rho v^2(\omega_r) \frac{R + \Theta_1}{2R^2} \quad (2.21)$$

$$\text{avec } R = \sqrt{(\Theta_1^2 + \Theta_2^2)}, \quad \Theta_1 = 1 - \sum_{l=1}^L \frac{\Upsilon^{M,l}}{1 + (\omega_r/\omega_l)^2} \text{ et } \Theta_2 = \sum_{l=1}^L \frac{\Upsilon^{M,l} \omega_r/\omega_l}{1 + (\omega_r/\omega_l)^2}.$$

### 2.3 Approximation des coefficients anélastiques

L'atténuation est couramment introduite par l'intermédiaire d'un facteur de qualité  $Q$ . A partir d'un module viscoélastique  $M$  donné ( $\lambda$  ou  $\mu$  de l'équation (2.19)) ce facteur qualité  $Q_M(\omega)$  est défini par

$$Q_M(\omega) = \frac{\operatorname{Re} M(\omega)}{\operatorname{Im} M(\omega)}, \quad (2.22)$$

et son inverse par

$$Q_M^{-1}(\omega) = \frac{\sum_{l=1}^L \frac{\Upsilon^{M,l} \omega_l \omega}{\omega_l^2 + \omega^2}}{1 - \sum_{l=1}^L \frac{\Upsilon^{M,l} \omega_l^2}{\omega_l^2 + \omega^2}} = \sum_{l=1}^L \Upsilon_{M,l} \frac{\omega_l \omega + \omega_l^2 Q_M^{-1}(\omega)}{\omega_l^2 + \omega^2}, \quad (2.23)$$

ce qui permet d'approcher numériquement n'importe quelle loi pour  $Q$ .

Campbell [6] suggère de diviser le facteur de qualité en deux composantes, une composante indépendante de la fréquence nommée atténuation intrinsèque ou anélasticité ( $Q_{in}^{-1}$ ) résultant de l'amortissement interne du milieu et une composante dépendant de la fréquence communément appelée diffraction (*scattering*,  $Q_{sc}^{-1}$ ) provenant de la présence d'hétérogénéités lors de la propagation des ondes. Le facteur d'atténuation est alors la somme de ces deux termes  $Q^{-1} = Q_{in}^{-1} + Q_{sc}^{-1}$ . Ainsi, si  $Q_{sc}$  contribue significativement à l'atténuation,  $Q$  sera également dépendant de la fréquence. Kwok *et al.* [32] ou Stupazzini *et al.* [55] proposent des travaux basés sur une telle

dépendance de  $Q$ . Cependant, dans l'intervalle des fréquences d'observation de la sismologie, le facteur de qualité est généralement considéré comme approximativement constant ou dépendant faiblement de la fréquence (Aki et Richards [1]) et c'est l'hypothèse que nous choisissons de faire. Ainsi, une bonne approximation peut être obtenue en choisissant  $n$  fréquences de relaxation  $\omega_l$  dans l'intervalle de fréquence d'intérêt et en résolvant l'équation (2.23) par une méthode de moindres carrés (comme détaillé par Emmerich et Korn [16]) dont les solutions sont les coefficients anélastiques  $\Upsilon^{M,l} = k_l/M^U$ . Le calcul des coefficients anélastiques s'effectue donc en amont de la simulation à partir des valeurs de  $Q_P$  et  $Q_S$  données pour les ondes P et S.

L'intervalle de fréquences considéré pour l'optimisation ainsi que le nombre de fréquences de relaxation et leur répartition dans cet intervalle sont autant de critères modifiant l'approximation obtenue. Emmerich et Korn [16] proposent d'utiliser des fréquences réparties linéairement sur un axe logarithmique, c'est-à-dire telles que  $\omega_{l-1} = 10^{-1}\omega_l$  (méthode référencée par EK). Pour une fréquence maximale  $\omega_L$  égale à 10 Hz, valeur standard en sismologie, les fréquences de relaxation seront donc  $10^{-1}, 1, 10$  pour 3 mécanismes,  $10^{-2}, 10^{-1}, 1, 10$  pour 4 mécanismes, et ainsi de suite. Notons que le facteur 10 entre deux valeurs de fréquence permet d'assurer la positivité des solutions issues de l'optimisation. Dans cette approche, l'intervalle d'étude et le nombre de mécanismes ne sont donc pas indépendants puisque ajouter un mécanisme revient à diminuer d'un facteur 10 la borne inférieure de l'intervalle contenant les fréquences de relaxation.

On peut également considérer un intervalle fixe, par exemple  $[10^{-1}, 10]$ , et diminuer l'espacement entre les fréquences lorsque l'on augmente le nombre de mécanismes dans cet intervalle, comme dans Käser *et al.* [26]. Cependant, avec cette méthode à borne inférieure (*lower bound*), lorsque le nombre de mécanismes est trop grand comparé à l'intervalle de fréquences, la distance entre deux fréquences de relaxation devient trop petite et il n'est plus garanti que la procédure d'optimisation fournisse des coefficients anélastiques positifs. Pour s'assurer de la positivité des coefficients, on peut donc ajouter cette contrainte lors de l'optimisation.

Nous comparons maintenant ces différentes méthodes. Nous présentons, figure 2, les résultats obtenus pour l'approximation de  $Q_P = 10$  dans l'intervalle  $[10^{-1}, 10]$  Hz. Nous constatons que pour 3 mécanismes les différentes approches conduisent aux mêmes approximations (l'erreur relative entre l'approximation et la valeur  $Q_P = 10$  est d'environ 6%). En effet, compte tenu du nombre de mécanismes choisis, les fréquences de relaxation sont identiques pour toutes les méthodes et les coefficients obtenus sont positifs.

Les résultats diffèrent lorsque l'on considère 8 mécanismes, comme illustré sur la figure 3, pour le même intervalle d'intérêt. On peut constater aisément, sur la figure du haut, le principe de la méthode EK consistant à étendre l'intervalle d'approximation par rapport au cas précédent de 3 mécanismes. En revanche, sur l'intervalle  $[10^{-1}, 10]$  Hz, l'approximation est restée la même que pour 3 mécanismes produisant une approximation moins précise que la méthode avec borne inférieure qui réduit l'amplitude autour de la valeur  $Q_P^{-1} = 0.1$  (l'erreur relative est d'environ 1%). De plus, on remarque que l'approximation obtenue par optimisation sous contraintes donne un résultat légèrement moins précis que l'optimisation libre (erreur relative d'environ 2%), mais la différence est faible. Toutefois, en pratique, pour limiter le temps de calcul ainsi que le nombre d'inconnues, le nombre de mécanismes sera moins élevé (plutôt 3 ou 5, comme illustré dans nos simulations sur un bassin réaliste) et l'optimisation sans contrainte sera généralement suffisante.

## 2.4 Formulation du système pour un milieu viscoélastique

Une généralisation de la relation linéaire contraintes-déformations (2.16) dans le cas 3D isotrope s'écrit

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} - \sum_{l=1}^L (\lambda \Upsilon^{\lambda,l} \zeta_{kk}^l \delta_{ij} + 2\mu \Upsilon^{\mu,l} \zeta_{ij}^l), \quad (2.24)$$

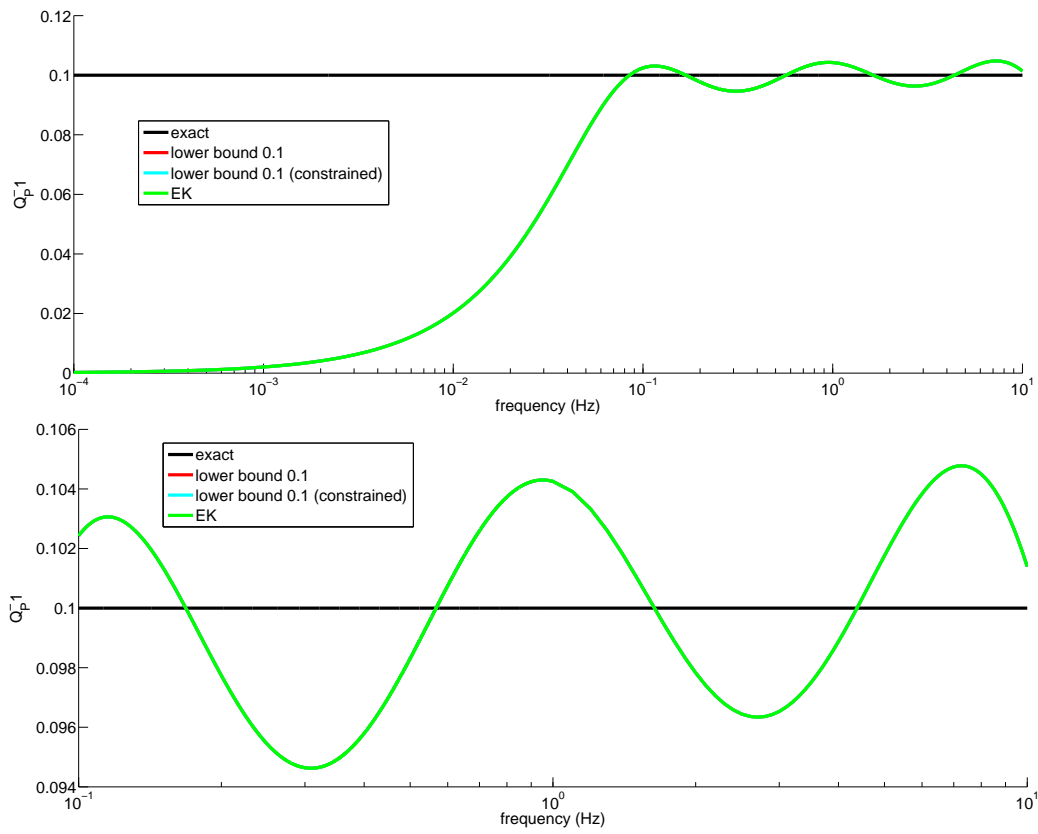


FIG. 2 – Approximation de  $Q_P^{-1} = 10^{-1}$  dans l'intervalle cible  $[10^{-1}, 10]$  Hz par 3 mécanismes avec différentes méthodes. En haut, visualisation sur la bande de fréquences étendue  $[10^{-4}, 10]$  Hz, en bas, sur  $[10^{-1}, 10]$  Hz.

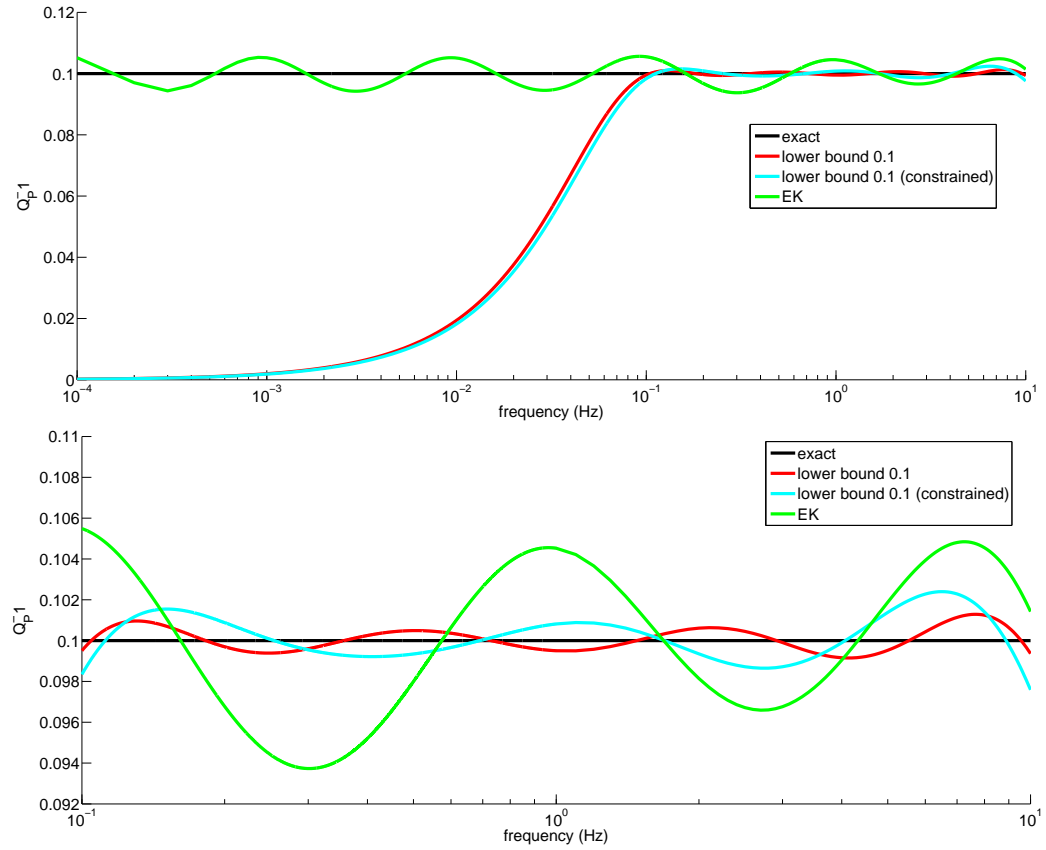


FIG. 3 – Approximation de  $Q_P^{-1} = 10^{-1}$  dans l'intervalle cible  $[10^{-1}, 10]$  Hz par 8 mécanismes avec les différentes méthodes. En haut, visualisation sur la bande de fréquences étendue  $[10^{-4}, 10]$  Hz, en bas, sur  $[10^{-1}, 10]$  Hz.

où  $\lambda$  et  $\mu$  correspondent aux modules instantanés  $\lambda^U$  et  $\mu^U$  de l'équation (2.19). On a supposé que les deux GMB considérés (un pour  $\lambda$ , un pour  $\mu$ ) ont le même nombre  $L$  de mécanismes et les mêmes fréquences de relaxation  $\omega_l$ ,  $l = 1, \dots, L$ . Les fonctions anélastiques  $\zeta_{ij}$  sont définies chacune comme dans le cas 1D (eq. (2.17)) par

$$\zeta_{ij}^l(t) = \omega_l \int_{-\infty}^t e^{-\omega_l(t-\tau)} \epsilon_{ij}(\tau) d\tau. \quad (2.25)$$

Les équations (2.24), écrites pour chaque composantes  $\sigma_{ij}$ , sont équivalentes à la forme matricielle suivante

$$\sigma = \lambda (\nabla \cdot u) I + \mu (\nabla u + \nabla u^T) - \sum_{l=1}^L (\lambda \Upsilon^{\lambda,l} \text{tr}(\zeta^l) I + 2\mu \Upsilon^{\mu,l} \zeta^l). \quad (2.26)$$

Afin d'obtenir une formulation en vitesse-contraintes, on dérive l'expression précédente et on obtient

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \lambda (\nabla \cdot v) I + \mu (\nabla v + \nabla v^T) - \sum_{l=1}^L (\lambda \Upsilon^{\lambda,l} \text{tr}(\xi^l) I + 2\mu \Upsilon^{\mu,l} \xi^l), \quad (2.27)$$

dépendant des nouvelles fonctions anélastiques

$$\xi^l = \frac{\partial \zeta^l}{\partial t}, \quad l = 1, \dots, L, \quad (2.28)$$

comme suggéré par Moczo *et al.* [42]. Pour finir, il nous reste donc à écrire les équations vérifiées par  $\xi^l$ ,  $l = 1, \dots, L$ . Les fonctions  $\zeta_{ij}^l$  vérifiant l'équation différentielle (2.18), les nouvelles inconnues  $\xi_{ij}^l$  sont solutions de

$$\frac{\partial}{\partial t} \xi^l(t) + \omega_l \xi^l(t) = \omega_l \frac{\partial}{\partial t} \epsilon(t), \quad l = 1, \dots, L. \quad (2.29)$$

Finalement, le système s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial v}{\partial t} = \nabla \cdot \sigma, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \lambda (\nabla \cdot v) I + \mu (\nabla v + \nabla v^T) - \sum_{l=1}^L (\lambda \Upsilon^{\lambda,l} \text{tr}(\xi^l) I + 2\mu \Upsilon^{\mu,l} \xi^l), \\ \frac{\partial \xi^l}{\partial t} = \frac{\omega_l}{2} (\nabla v + \nabla v^T) - \omega_l \xi^l, \quad l = 1, \dots, L. \end{array} \right. \quad (2.30)$$

### 3 Discrétisation

#### 3.1 Discrétisation spatiale

Nous présentons la discrétisation du système par la méthode DG. Pour rester général, nous nous plaçons ici en trois dimensions d'espace.

On pose  $\overline{\mathbb{W}} = (v, \overline{\sigma}, \overline{\xi})^T$ , où  $\overline{\sigma} = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz})^T$  est le vecteur des inconnues du tenseur des contraintes. Le vecteur  $\overline{\xi}$ , à  $6L$  composantes, contient l'ensemble des six fonctions anélastiques indépendantes de chaque mécanisme.



Autrement dit,  $\bar{\xi} = (\bar{\xi}^1, \dots, \bar{\xi}^l, \dots, \bar{\xi}^L)^T$  avec  $\bar{\xi}^l = (\xi_{xx}^l, \xi_{yy}^l, \xi_{zz}^l, \xi_{xy}^l, \xi_{xz}^l, \xi_{yz}^l)^T$ . On peut alors écrire le système (2.30) sous la forme compacte

$$\frac{\partial \bar{\mathbb{W}}}{\partial t} + \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} B_\alpha \partial_\alpha \bar{\mathbb{W}} = E \bar{\mathbb{W}}. \quad (3.1)$$

C'est un système à  $9 + 6L$  équations et autant d'inconnues qui généralise le système élastique. Pour un vecteur  $\bar{n} = (n_x, n_y, n_z)^T$  de  $\mathbb{R}^3$ , la matrice

$$B_n(\rho, \lambda, \mu) = \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} B_\alpha(\rho, \lambda, \mu) n_\alpha, \quad (3.2)$$

est une matrice par blocs telle que

$$B_n = \begin{pmatrix} A_n & 0_{9 \times 6L} \\ C_n & 0_{6L \times 6L} \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

où  $A_n$  est la matrice  $9 \times 9$  suivante

$$A_n(\rho, \lambda, \mu) = \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} A_\alpha(\rho, \lambda, \mu) n_\alpha, \quad (3.4)$$

telle que

$$A_n(\rho, \lambda, \mu) = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{n_x}{\rho} & 0 & 0 & \frac{n_y}{\rho} & \frac{n_z}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{n_y}{\rho} & 0 & \frac{n_x}{\rho} & 0 & \frac{n_z}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{n_z}{\rho} & 0 & \frac{n_x}{\rho} & \frac{n_y}{\rho} \\ (\lambda + 2\mu)n_x & \lambda n_y & \lambda n_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda n_x & (\lambda + 2\mu)n_y & \lambda n_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda n_x & \lambda n_y & (\lambda + 2\mu)n_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu n_y & \mu n_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu n_z & 0 & \mu n_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu n_z & \mu n_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

et

$$C_n = \begin{pmatrix} C_n^1 \\ \vdots \\ C_n^l \\ \vdots \\ C_n^L \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

est une matrice par blocs  $6L \times 9$ , chaque bloc de taille  $6 \times 9$  étant défini par

$$C_n^l = -\frac{\omega_l}{2} \begin{pmatrix} 2n_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2n_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2n_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_y & n_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_z & 0 & n_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_z & n_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Remarquons que la matrice  $C_n^l$  n'est autre que le bloc inférieur de la matrice  $A_n(\rho, 0, \omega_l/2)$ . La matrice  $E$  de second membre possède également une structure par blocs. On a

$$E = \begin{pmatrix} 0_{9 \times 9} & E_\Upsilon \\ 0_{6L \times 9} & E_\omega \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

avec  $E_\Upsilon$  et  $E_\omega$  elles aussi des matrices par blocs, de taille  $9 \times 6L$  et  $6L \times 6L$  respectivement. Ainsi,

$$E_\Upsilon = \begin{pmatrix} E_\Upsilon^1 & \cdots & E_\Upsilon^l & \cdots & E_\Upsilon^L \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

où la matrice  $6 \times 6$   $E_\Upsilon^l$  est telle que

$$E_\Upsilon^l = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda \Upsilon^{\lambda,l} + 2\mu \Upsilon^{\mu,l} & \lambda \Upsilon^{\lambda,l} & \lambda \Upsilon^{\lambda,l} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda \Upsilon^{\lambda,l} & \lambda \Upsilon^{\lambda,l} + 2\mu \Upsilon^{\mu,l} & \lambda \Upsilon^{\lambda,l} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda \Upsilon^{\lambda,l} & \lambda \Upsilon^{\lambda,l} & \lambda \Upsilon^{\lambda,l} + 2\mu \Upsilon^{\mu,l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu \Upsilon^{\mu,l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \Upsilon^{\mu,l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \Upsilon^{\mu,l} \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

et

$$E_\omega = \begin{pmatrix} E_\omega^1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & E_\omega^L \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

où chaque matrice  $6 \times 6$   $E_\omega^l$  est définie par

$$E_\omega^l = -\omega_l I. \quad (3.12)$$

On considère un domaine polygonal  $\Omega$  partitionné en  $N_T$  simplexes  $\mathcal{T}_i$  (triangles en 2D, tétraèdres en 3D). On note  $\mathcal{V}(i)$  l'ensemble des indices des éléments voisins de  $\mathcal{T}_i$  et  $S_{ik}$  une face interne commune à  $\mathcal{T}_i$  et  $\mathcal{T}_k$ , c'est-à-dire  $S_{ik} = \mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_k$ . Enfin,  $\mathcal{E}(i)$  est l'ensemble des indices  $k$  des faces de l'élément  $\mathcal{T}_i$  commune à la frontière, soit  $S_k^{b_i} = \mathcal{T}_i \cap \partial\Omega$ .

Pour commencer, on multiplie le système (3.1) par une fonction test réelle  $\phi$ , et on intègre ensuite sur un élément  $\mathcal{T}_i$

$$\int_{\mathcal{T}_i} \left[ \frac{\partial \bar{\mathbb{W}}}{\partial t} + \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} B_\alpha(\rho, \lambda, \mu) \partial_\alpha \bar{\mathbb{W}} - E \bar{\mathbb{W}} \right] \phi dX = 0. \quad (3.13)$$

En supposant  $\rho$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  constants par élément  $\mathcal{T}_i$  et en appliquant la formule de Green au second terme de l'équation (3.13), on obtient

$$\int_{\mathcal{T}_i} \frac{\partial \bar{\mathbb{W}}}{\partial t} \phi dX - \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} B_\alpha^{\mathcal{T}_i} \int_{\mathcal{T}_i} \bar{\mathbb{W}} \partial_\alpha \phi dX + B_n^{\mathcal{T}_i} \int_{\partial \mathcal{T}_i} \bar{\mathbb{W}} \phi dS = E^{\mathcal{T}_i} \int_{\mathcal{T}_i} \bar{\mathbb{W}} \phi dX, \quad (3.14)$$

où  $B_n^{\mathcal{T}_i}$  (resp.  $E^{\mathcal{T}_i}$ ) est la restriction de  $B_n$  (resp.  $E$ ) à l'élément  $\mathcal{T}_i$ . On considère maintenant comme fonctions test les polynômes d'interpolation de Lagrange de degré  $m$  sur  $\mathcal{T}_i$ . On peut alors écrire une approximation de chaque composante  $W$  du vecteur  $\overline{W}$  sous la forme

$$W_{|\mathcal{T}_i}(x, t) = \sum_{j=1}^{d_i} W_j^{\mathcal{T}_i}(t) \phi_j^{\mathcal{T}_i}(x), \quad (3.15)$$

où  $d_i$  est le nombre de degrés de liberté sur l'élément  $\mathcal{T}_i$  et  $\phi_j^{\mathcal{T}_i}$  ( $j = 1, \dots, d_i$ ) sont les fonctions de base associées. Le premier terme de (3.14) s'écrit alors

$$\forall l = 1, \dots, d_i, \quad \int_{\mathcal{T}_i} \frac{\partial}{\partial t} \overline{W} \phi_l^{\mathcal{T}_i} dX = \sum_{j=1}^{d_i} M_{lj}^{\mathcal{T}_i} \frac{d}{dt} \overline{W}_j^{\mathcal{T}_i}, \quad (3.16)$$

avec  $M^{\mathcal{T}_i} = \left( \int_{\mathcal{T}_i} \phi_j^{\mathcal{T}_i} \phi_l^{\mathcal{T}_i} dX \right)_{1 \leq j, l \leq d_i}$  la matrice de masse sur  $\mathcal{T}_i$ . De même, pour le second membre, on obtient

$$\forall l = 1, \dots, d_i, \quad E^{\mathcal{T}_i} \int_{\mathcal{T}_i} \overline{W} \phi_l^{\mathcal{T}_i} dX = E^{\mathcal{T}_i} \sum_{j=1}^{d_i} M_{lj}^{\mathcal{T}_i} \overline{W}_j^{\mathcal{T}_i}. \quad (3.17)$$

La deuxième intégrale de (3.14) est approchée par

$$\forall l = 1, \dots, d_i, \quad \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} B_\alpha^{\mathcal{T}_i} \int_{\mathcal{T}_i} \overline{W} \partial_\alpha \phi_l^{\mathcal{T}_i} dX = \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} B_\alpha^{\mathcal{T}_i} \sum_{j=1}^{d_i} G_{\alpha, lj}^{\mathcal{T}_i} \overline{W}_j^{\mathcal{T}_i}, \quad (3.18)$$

avec  $G_\alpha^{\mathcal{T}_i} = \left( \int_{\mathcal{T}_i} \phi_j^{\mathcal{T}_i} \partial_\alpha \phi_l^{\mathcal{T}_i} dX \right)_{1 \leq j, l \leq d_i}$ .

Afin de calculer l'intégrale de bord apparaissant dans (3.14), on sépare  $\partial \mathcal{T}_i$  en ses parties interne et frontière

$$\forall l = 1, \dots, d_i, \quad B_n^{\mathcal{T}_i} \sum_{k \in \mathcal{V}(i)} \int_{S_{ik}} \overline{W} \phi_l^{\mathcal{T}_i} dS + B_n^{\mathcal{T}_i} \sum_{k \in \mathcal{E}(i)} \int_{S_k^{b_i}} \overline{W} \phi_l^{\mathcal{T}_i} dS. \quad (3.19)$$

On définit un flux centré pour les faces internes  $S_{ik}$

$$\overline{W}_{|S_{ik}} = \frac{1}{2} \left( \overline{W}^{\mathcal{T}_i} + \overline{W}^{\mathcal{T}_k} \right). \quad (3.20)$$

L'intégrale correspondante s'écrit alors :

$$\forall l = 1, \dots, d_i, \quad B_n^{\mathcal{T}_i} \sum_{k \in \mathcal{V}(i)} \int_{S_{ik}} \overline{W} \phi_l^{\mathcal{T}_i} dS \frac{1}{2} B_n^{\mathcal{T}_i} \sum_{k \in \mathcal{V}(i)} \sum_{j=1}^{d_i} \left[ \left( R_{|S_{ik}}^{\mathcal{T}_i} \right)_{lj} \overline{W}_j^{\mathcal{T}_i} + \left( R_{|S_{ik}}^{\mathcal{T}_k} \right)_{lj} \overline{W}_j^{\mathcal{T}_k} \right], \quad (3.21)$$

où l'on a noté  $R_{|S_{ik}}^{\mathcal{T}_i} = \left( \int_{S_{ik}} \phi_j^{\mathcal{T}_i} \phi_l^{\mathcal{T}_i} dS \right)_{1 \leq j, l \leq d_i}$  et  $R_{|S_{ik}}^{\mathcal{T}_k} = \left( \int_{S_{ik}} \phi_j^{\mathcal{T}_k} \phi_l^{\mathcal{T}_i} dS \right)_{1 \leq j, l \leq d_i}$ .

## 3.2 Conditions aux limites

### 3.2.1 Surface libre

La condition de surface libre est une condition physique indiquant une traction nulle à l'interface entre l'air et le sol, c'est-à-dire  $\sigma \bar{n} = 0$ . On introduit cette condition directement dans l'intégrale de bord, en écrivant

$$\forall m = 1, \dots, d_i, \quad B_n^{\mathcal{T}_i} \int_{S_k^{b_i}} \bar{\mathbb{W}} \phi_m^{\mathcal{T}_i} dS = B_n^{\mathcal{T}_i} \sum_{j=1}^{d_i} \left( R_{|S_k^{b_i}}^{\mathcal{T}_i} \right)_{mj} \left( \bar{\mathbb{W}}_{|S_k^{b_i}}^{\mathcal{T}_i} \right)_j, \quad (3.22)$$

$$\text{où } \bar{\mathbb{W}}_{|S_k^{b_i}}^{\mathcal{T}_i} = (v^{\mathcal{T}_i}, 0_{1 \times 6}, \bar{\xi}^{\mathcal{T}_i})^T \text{ et } R_{|S_k^{b_i}}^{\mathcal{T}_i} = \left( \int_{S_k^{b_i}} \phi_j^{\mathcal{T}_i} \phi_m^{\mathcal{T}_i} dS \right)_{1 \leq j, m \leq d_i}.$$

### 3.2.2 Bords absorbants

Pour simuler la propagation dans un domaine infini, nécessairement représenté par un domaine de calcul borné, on applique des conditions absorbantes sur ces bords particuliers. La matrice  $B_n$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  quel que soit  $\bar{n} = (n_x, n_y, n_z)^T$  vecteur unité, et la matrice des valeurs propres est

$$\Lambda_{el} = \begin{pmatrix} \Lambda & 0_{9 \times 6L} \\ 0_{6L \times 9} & 0_{6L \times 6L} \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

où la matrice  $\Lambda$  est la matrice des valeurs propres dans le cas élastique. Elle dépend des vitesses de propagation  $v_p$  et  $v_s$  données par l'équation (2.4)

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -v_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -v_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -v_p \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

La condition absorbante est simplement obtenue en considérant, pour ces faces, un schéma décentré dans lequel seule la contribution sortante est prise en compte tandis que la contribution entrante est négligée. Pour cela, on pose  $\Lambda = \Lambda^+ + \Lambda^-$  où  $\Lambda^+ = \max(\Lambda, 0)$  et  $\Lambda^- = \min(\Lambda, 0)$ . Si  $P$  est la matrice des vecteurs propres, on peut donc écrire  $B_n = B_n^+ + B_n^-$  avec  $B_n^+ = P \bar{\Lambda}^+ P^{-1}$  et  $B_n^- = P \bar{\Lambda}^- P^{-1}$ . En ne conservant que la partie sortante, on approche alors la deuxième intégrale de (3.19) par

$$\forall l = 1, \dots, d_i, \quad B_n^{\mathcal{T}_i} \int_{S_k^{b_i}} \bar{\mathbb{W}} \phi_l^{\mathcal{T}_i} dS \simeq B_n^{\mathcal{T}_i+} \sum_{j=1}^{d_i} \left( R_{|S_k^{b_i}}^{\mathcal{T}_i} \right)_{lj} \bar{\mathbb{W}}_j^{\mathcal{T}_i}. \quad (3.25)$$

### 3.2.3 Bords périodiques

Dans certaines applications, il est possible d'appliquer des conditions de périodicité, notamment le cas de la propagation dans une colonne hétérogène 1D (section 4.1). Le modèle ainsi que les solutions étant indépendantes de  $x$ , on peut appliquer de telles conditions sur les deux faces latérales du domaine de calcul. Pour cela, les faces directement opposées sont artificiellement connectées entre elles de sorte que l'on peut appliquer un schéma centré, comme pour les faces internes. En pratique, ces conditions de périodicité peuvent également être appliquées à des configurations 2D (notamment des bassins sédimentaires), à la seule condition que les bords latéraux soient placés suffisamment loin du domaine d'intérêt afin d'éviter le retour d'ondes depuis ces bords.

### 3.3 Discrétisation temporelle

On utilise un schéma de type saute-mouton, c'est-à-dire que  $v$  et  $\sigma$  sont calculés en des temps décalés. En notant  $\Delta t$  le pas de temps,  $\mathcal{F}_\alpha^{\mathcal{T}_i}$  ( $\alpha = x, y, z$ ),  $\mathcal{G}_{\alpha,\beta}^{\mathcal{T}_i}$  ( $\alpha, \beta = x, y, z$ ) et  $\mathcal{H}_{\alpha,\beta}^{\mathcal{T}_i}$  ( $\alpha, \beta = x, y, z$ ) les opérateurs discrets prenant en compte les intégrales sur  $\mathcal{T}_i$  et  $\partial\mathcal{T}_i$ , la formulation du schéma GD sur un élément  $\mathcal{T}_i$  s'écrit finalement :

$$M^{\mathcal{T}_i} \frac{\overline{\mathcal{W}_{v_\alpha}^{n+1}} - \overline{\mathcal{W}_{v_\alpha}^n}}{\Delta t} = \overline{\mathcal{F}_\alpha^{\mathcal{T}_i} \left( \bar{\sigma}^{n+\frac{1}{2}} \right)}, \quad (3.26)$$

$$M^{\mathcal{T}_i} \frac{\overline{\mathcal{W}_{\sigma_{\alpha\beta}}^{n+\frac{3}{2}}} - \overline{\mathcal{W}_{\sigma_{\alpha\beta}}^{n+\frac{1}{2}}}}{\Delta t} = \overline{\mathcal{G}_{\alpha,\beta}^{\mathcal{T}_i} \left( v^{n+1}, \bar{\xi}^{l,n+\frac{1}{2}} \right)}, \quad (3.27)$$

$$M^{\mathcal{T}_i} \frac{\overline{\mathcal{W}_{\xi_{\alpha\beta}^l}^{n+\frac{3}{2}}} - \overline{\mathcal{W}_{\xi_{\alpha\beta}^l}^{n+\frac{1}{2}}}}{\Delta t} = \overline{\mathcal{H}_{\alpha,\beta}^{\mathcal{T}_i} \left( v^{n+1}, \bar{\xi}^{l,n+\frac{1}{2}} \right)}, \quad (3.28)$$

où  $\overline{\mathcal{W}_{\xi_{\alpha\beta}^l}}$  est le vecteur des  $d_i$  valeurs de  $\xi_{\alpha\beta}^l$  ( $\alpha, \beta = x, y, z$  et  $l = 1, \dots, L$ ) sur  $\mathcal{T}_i$ ,  $\bar{\xi}^{l,n+\frac{1}{2}}$  sont les fonctions anélastiques en  $(n + \frac{1}{2})\Delta t$ .

### 3.4 Implémentation de l'onde plane

L'implémentation de l'onde plane dans la méthode Galerkin discontinu peut être faite de deux façons. La première consiste à introduire l'onde plane incidente, dont l'expression est connue en espace et en temps pour toutes les variables du système, comme une condition initiale dans le rocher. La seconde technique, qui est celle utilisée par la méthode des différences finies, a été adoptée dans ce travail pour faciliter la comparaison des méthodes GD et DF.

L'onde plane SV d'incidence verticale est introduite comme second membre sur la composante horizontale  $v_x$  des vitesses via le terme  $g(x, y) s(t)$  où  $g$  est une fonction gaussienne normalisée qui s'écrit, en deux dimensions d'espace

$$g(x, y) = \frac{1}{M} \exp \left[ -\frac{(y - y_S)^2}{h^2} \right] \quad \text{avec} \quad M = \int_{\Omega} g(x, y) dx dy, \quad (3.29)$$

$y_S$  est une ordonnée dans le rocher et  $h$  est le support de cette gaussienne qui doit être choisi de l'ordre du pas d'espace du maillage. Notons que  $g$  ne dépend que de  $y$  permettant ainsi de générer une onde plane verticale indépendante de  $x$ ; cette méthode peut être utilisée pour une source ponctuelle avec une fonction  $g$  dépendant de  $x$  et  $y$ . En pratique, pour assurer l'indépendance en  $x$ , il convient d'appliquer des conditions de périodicité aux deux bords latéraux du domaine de calcul afin d'éviter une perte d'énergie au cours du temps dans le cas de conditions de bord de type absorbant.

## 4 Résultats numériques

On s'intéresse dans cette section à l'application de la méthode Galerkin discontinue à deux problèmes tests différents en deux dimensions d'espace. Le premier, la propagation d'une onde plane dans une colonne de sol hétérogène, permet une validation précise de notre méthode. Le second concerne un cas complexe plus réaliste de propagation dans un bassin sédimentaire. Dans les deux cas, nos résultats sont comparés avec ceux d'une méthode différences finies (Gélis *et al.* [20]) dont les caractéristiques principales sont précisées dans l'annexe, en fin de ce document. Dans le cas DF, la prise en compte de la viscoélasticité suit l'approche proposée par Liu et Archuleta [35] : 8 mécanismes sont introduits par point de la grille numérique et un jeu de paramètres définissant les temps de relaxation sont choisis de sorte que les facteurs de qualités  $Q$  soient correctement modélisables pour des valeurs comprises entre 5 et 5000 et considérés comme constants entre 0.01 Hz et 50 Hz. Dans le cas 1D, ces résultats sont également comparés à ceux de la méthode Haskell-Thomson (HT, Haskell [24], Thomson [56]) qui étudie la propagation d'une onde plane dans un milieu 1D à couches. La méthode, écrite dans le domaine fréquentiel, permet de prendre en compte correctement l'atténuation pour toutes les fréquences.

### 4.1 Propagation d'une onde plane dans une colonne de sol hétérogène

L'objectif de ce premier cas test, relativement simple, est de permettre une validation très précise de la méthode GD proposée. On considère la propagation d'une onde plane d'incidence verticale de type S dans une colonne de sol hétérogène composée de sept couches différentes de dépôts sédimentaires sur du rocher. Ce cas est 1D mais nous l'étudions en deux dimensions, comme décrit figure 4. Le tableau 1 présente les caractéristiques de ces différents milieux ; on

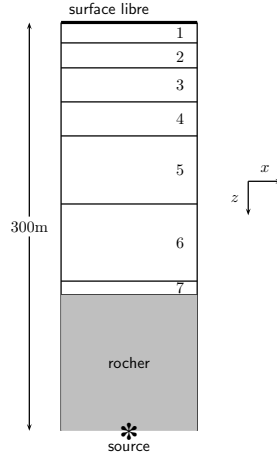


FIG. 4 – Description de la colonne de sol hétérogène

remarque notamment des contrastes de vitesse importants. Les vitesses ainsi que les épaisseurs de chaque milieu ont été choisies pour être tout à fait représentatives d'une colonne de sol réelle. L'onde plane incidente est introduite dans la partie rocher du modèle par l'intermédiaire d'un terme source au second membre de la composante  $v_x$  et se propage verticalement à travers les différents milieux jusqu'à la surface. La partie temporelle de cette source  $s$  a un contenu fréquentiel se situant principalement dans l'intervalle  $[0, 10]$  Hz (comme on peut le constater sur la figure 5). Une condition de surface libre est appliquée sur le bord supérieur du domaine

	$v_p(f_r)$ (m/s)	$v_s(f_r)$ (m/s)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$Q_p$	$Q_s$
1	1500	130	2050	75	15
2	1500	200	2150	75	20
3	1650	300	2075	83	30
4	2050	450	2100	103	40
5	2450	600	2155	123	60
6	2550	700	2200	140	70
7	3500	1250	2500	200	100
rocher	4500	2600	2600	50000	50000

TAB. 1 – Caractéristiques des différents milieux constituant la colonne hétérogène. Les valeurs des vitesses correspondent à la fréquence de référence  $f_r$ .

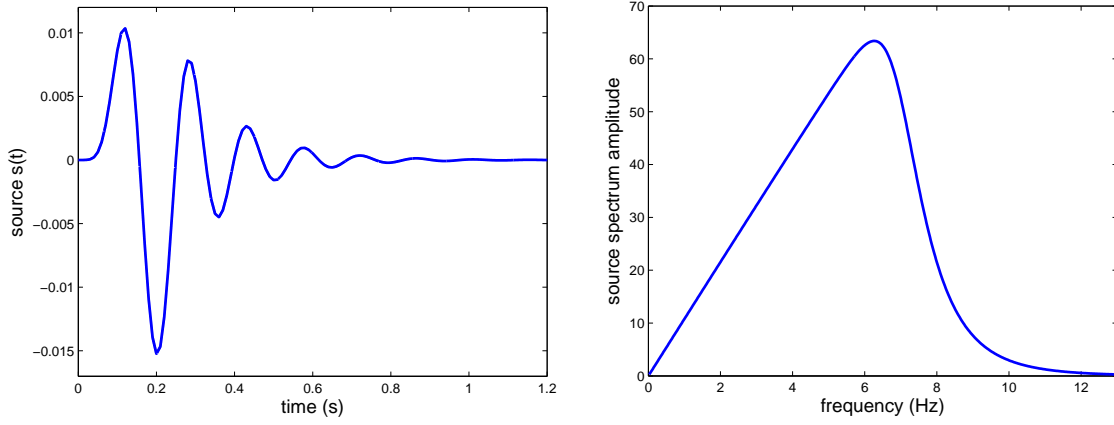
de calcul. Comme le problème est 1D, on peut supposer des conditions de périodicité sur les faces latérales du domaine de calcul. Enfin, pour le bord inférieur, il s'agit de conditions de type absorbant.

On effectue des comparaisons entre les solutions obtenues par les méthodes Galerkin discontinue (GD), différences finies (DF), ainsi que par la méthode Haskell-Thomson (HT). On s'intéresse aux rapports spectraux de la composante horizontale de vitesse  $v_x$  (ou fonctions de transfert), définis comme les ratios dans le domaine fréquentiel entre la solution calculée en surface de la colonne et la solution correspondante dans le cas idéal de propagation élastique dans un rocher homogène. Notons que dans le cas d'un milieu homogène élastique, la réponse en surface est égale au double de la valeur incidente en raison de la réflexion au niveau de la surface libre, les rapports spectraux entre solution et référence sont donc, par définition, constants et égaux à 1 dans tout milieu homogène élastique.

Dans un milieu hétérogène, comme c'est le cas étudié ici, on observe, figure 6, un comportement bien plus complexe des fonctions de transfert et des valeurs d'amplification très élevées à la fréquence fondamentale ainsi qu'aux modes supérieurs résultant des ondes constructives successives, montantes et descendantes, piégées dans la colonne hétérogène. Ainsi la présence de couches meubles en surface mène à une amplification du mouvement sismique dans certaines gammes de fréquence; c'est l'effet de site. Notons également la parfaite superposition des résultats de la méthode GD avec ceux des deux autres méthodes.

On s'intéresse à présent au cas viscoélastique. Pour la méthode GD, les coefficients anélastiques sont déterminés suivant la technique de la borne inférieure avec contrainte sur l'intervalle  $[0, 10]$  Hz. Dans un premier temps, on utilise 8 mécanismes et l'on compare, figure 7, les résultats des différentes méthodes. On note une excellente concordance entre elles sur la bande de fréquence considérée, ce qui constitue une première validation de notre approche.

On étudie maintenant l'influence du nombre de mécanismes sur les rapports spectraux. On présente, figure 8, les résultats obtenus par la méthode GD en utilisant 3, 5 ou 8 mécanismes. On constate que les différences sont peu visibles sur les basses fréquences (jusqu'à 2 Hz), mais plus importantes à haute fréquence. Ainsi, le nombre de mécanismes nécessaires pour obtenir une bonne solution semble dépendre de la bande de fréquences à laquelle on s'intéresse, notamment du contenu fréquentiel de l'onde incidente. Notons que, même lorsque 3 mécanismes sont utilisés, les différences d'amplitude sont minimales.

FIG. 5 – Description de la source  $s$  en temps (à gauche) et en fréquence (à droite)

En superposant les fonctions de transfert obtenues avec les différentes méthodes dans les cas élastique et viscoélastique (figure 9), on constate, comme attendu, que l'atténuation anélastique est visible au niveau des pics d'amplification mais ne modifie pas les fréquences concernées et, de plus, augmente en fonction de la fréquence. Au-delà de 8. Hz, les valeurs de l'amplification varient entre 2 et 4 dans le cas viscoélastique alors qu'elles atteignent des valeurs d'environ 10 dans le cas élastique, ce qui conduit à une surestimation des amplifications par rapport à un cas plus réaliste.

Enfin, on étudie l'influence de la dispersion dans les résultats obtenus. Selon Kjartansson [29], la portion d'énergie perdue par cycle ou par longueur d'onde est indépendante de la fréquence mais les pertes anélastiques sont dues à la dispersion intrinsèque des ondes qui se propagent à des vitesses dépendant de leur fréquence. Donc les vitesses dans les différents milieux sont données pour une certaine fréquence de référence  $f_r$ . Or, comme nous l'avons détaillé précédemment, les coefficients élastiques utilisés dans le système en temps sont déterminés grâce aux vitesses élastiques, c'est-à-dire à fréquence infinie. Par conséquent, les résultats vont dépendre fortement de cette fréquence de référence, présente dans la relation définissant  $M^U$ , équation (2.21) (Graves et Day [22], Liu et Archuleta [35]). Par exemple, si l'on remplace  $f_r = 8$  Hz utilisée dans les premières séries de résultats pour DG et les DF par  $f_r = 1$  Hz, on observe - logiquement - une forte modification du rapport spectral, très visible sur la figure 10. Par conséquent, et notamment dans les cas de comparaison entre différentes méthodes, sa valeur doit être précisée. Le plus souvent, la valeur de la fréquence de référence est choisie par défaut égale à 1 Hz (Moczo *et al.* [42] ou Liu et Archuleta [35]). Cependant, lorsque la gamme de fréquences est plus large, et notamment haute fréquence, on peut choisir une valeur plus élevée, comme c'est le cas ici. Notons que les simulations HT sont réalisées directement dans le domaine fréquentiel et par conséquent ne dépendent pas de cette fréquence de référence  $f_r$ .



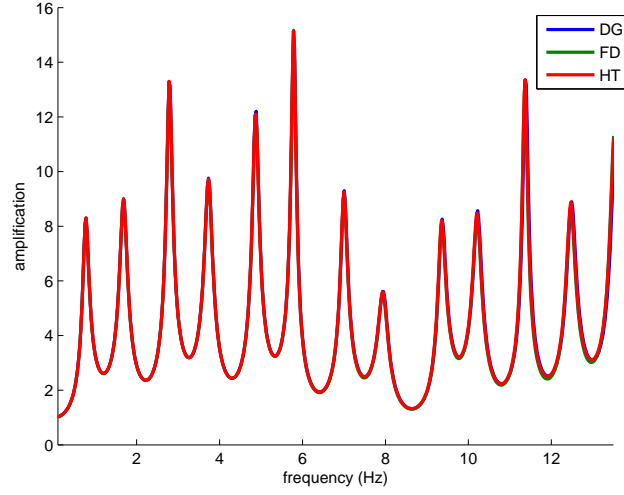


FIG. 6 – Rapports spectraux de la vitesse horizontale  $v_x$  pour le cas de la colonne hétérogène et dans le cas élastique. Résultats GD en bleu, DF en vert et HT en rouge.

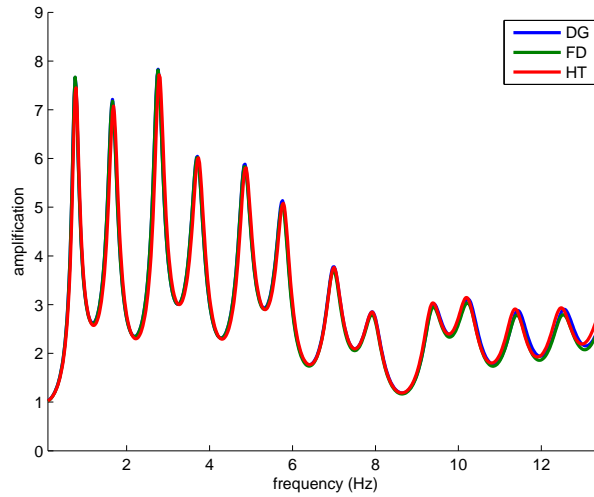


FIG. 7 – Rapports spectraux de la vitesse horizontale  $v_x$  pour le cas de la colonne hétérogène et dans le cas viscoélastique. Résultats GD en bleu, DF en vert et HT en rouge.

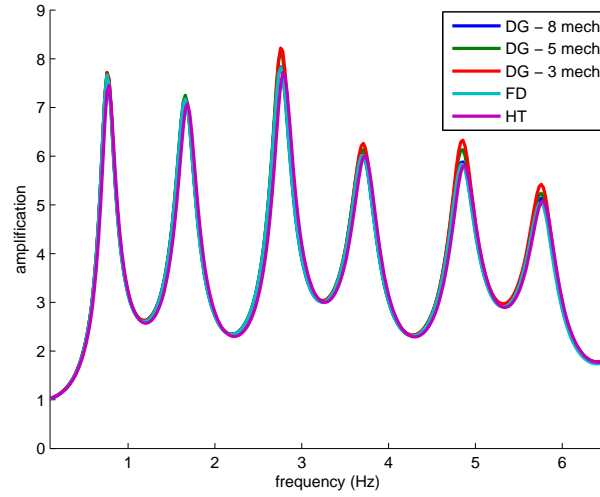


FIG. 8 – Rapports spectraux de la vitesse horizontale  $v_x$  pour le cas de la colonne hétérogène et dans le cas viscoélastique. Comparaison des solutions GD avec 3 (en rouge), 5 (en vert) et 8 (en bleu) mécanismes. Résultats DF en turquoise et HT en violet.

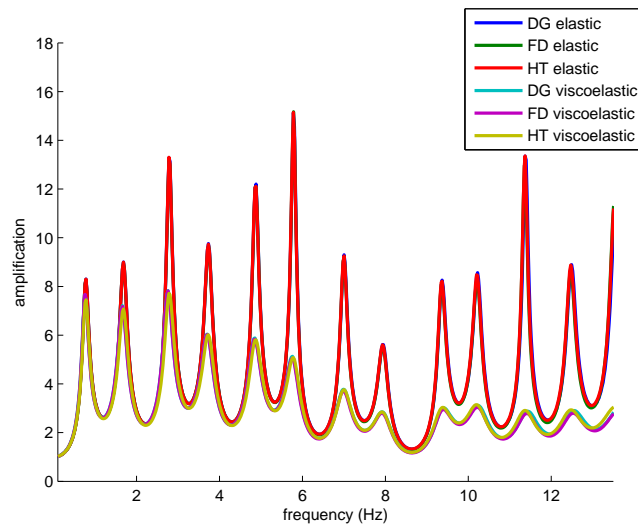


FIG. 9 – Rapports spectraux de la composante de vitesse horizontale  $v_x$ . Comparaison des cas élastique et viscoélastique.

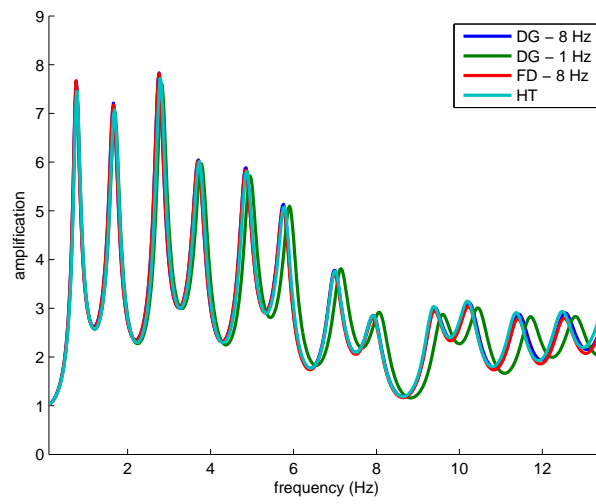


FIG. 10 – Rapports spectraux de la composante de vitesse horizontale  $v_x$ . Comparaison des fréquences de référence  $f_r = 1$  Hz et  $f_r = 8$  Hz.

## 4.2 Propagation dans le bassin de Nice

### 4.2.1 Géométrie réaliste de bassin 2D hétérogène

Nous nous intéressons à présent à un cas plus réaliste et étudions la propagation d'une onde plane SV d'incidence verticale dans un bassin sédimentaire 2D. La géométrie de ce bassin est extraite d'un modèle 3D de la région de Nice (Alpes-Maritimes, France) [3] fourni par le CETE Méditerranée qui décrit la topographie et les propriétés en profondeur sur une grille de 10 m de résolution. La position du profil 2D sur la topographie de Nice ainsi que le détail du modèle

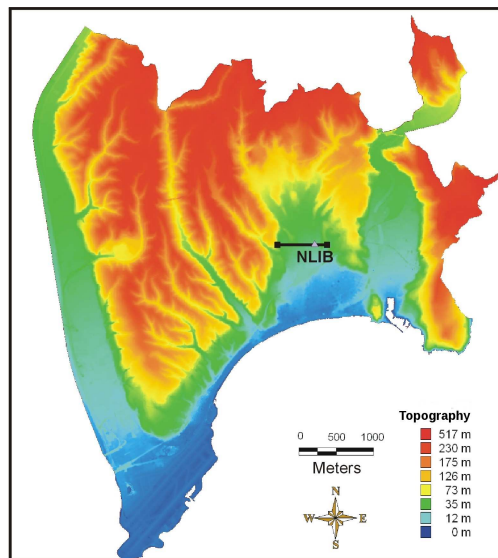


FIG. 11 – Topographie de la ville de Nice et localisation du profil 2D utilisé pour les simulations (ligne noire). NLIB est une station du RAP (Réseau Accélérométrique Permanent) où ont été enregistrés les signaux réels.

sont donnés dans les figures 11 et 12. Comme constaté sur la coupe (figure 12), la géométrie du modèle a été prolongée de part et d'autre du bassin par deux parties homogènes horizontales de même altitude, modifiant légèrement la coupe originale, afin d'appliquer des conditions de périodicité aux bords latéraux. Ce modèle est complexe et fortement hétérogène comme l'attestent

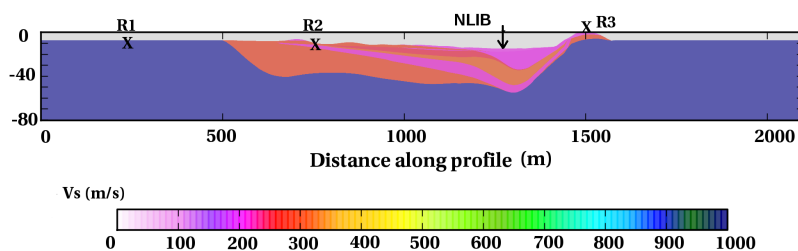


FIG. 12 – Coupe verticale de la vitesse des ondes S dans le bassin 2D et position des récepteurs R1, R2 et R3 pour les simulations ainsi que de la station réelle NLIB.

les propriétés des différents milieux listées dans le tableau 2 ; les facteurs de qualité, qui ne sont

pas mentionnés dans le tableau, vérifient  $Q_P = v_p/10$  et  $Q_S = v_s/10$ , approximation courante par défaut lorsque aucune information sur ces valeurs n'est disponible. Comme pour le cas test précédent, les solutions obtenues par la méthode Galerkin discontinue sont comparées aux résultats des différences finies. En revanche, nous n'utilisons pas la méthode Haskell-Thomson qui n'est applicable qu'à des milieux 1D.

	$v_p(f_r)$ (m/s)	$v_s(f_r)$ (m/s)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
1	440	180	1900
2	710	290	1900
3	489	200	1700
4	808	330	2100
5	612	250	1800
6	734	300	2100
7	538	220	1800
8	710	290	2000
9	734	300	2000
rocher	2449	1000	2100

TAB. 2 – Caractéristiques des milieux composant le bassin de Nice 2D. Les valeurs des vitesses correspondent à la fréquence de référence  $f_r = 1$  Hz.

Les dimensions du domaine de calcul sont 2100 m de large et jusqu'à 75 m de profondeur. Un maillage triangulaire non structuré, respectant les interfaces entre les différents milieux est construit via le mailleur Simail [15] ; la largeur de maille est d'environ 1 m dans le bassin (comme représenté figure 13) et 4 m dans le rocher et le maillage obtenu contient 107 707 triangles. Pour

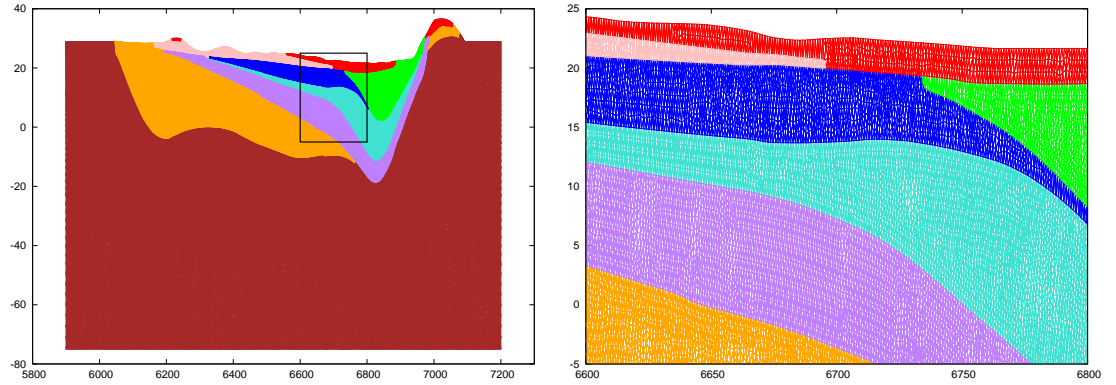


FIG. 13 – Maillage triangulaire du bassin de Nice 2D (figure de gauche) et détail de la zone encadrée (droite).

la construction des interfaces entre les différents milieux ainsi qu'en fond de bassin, la résolution

du modèle initial 3D étant de 10 m, nous avons utilisé des splines afin de régulariser les interfaces. Le nombre de mécanismes pour prendre en compte l'atténuation viscoélastique a été fixé ici à 3. Les calculs en différences finies utilisent une grille cartésienne uniforme ( $\Delta x = \Delta y = 0.125$  m, pour un maillage comprenant 16 801 points en  $x$  et 643 points en  $y$ ) dont le pas d'espace correspond à 60 points par longueur d'onde, comme requis par le stencil de Saenger *et al.* [48] en présence de conditions de surface libre et d'une topographie non plane. Dans le cas DF, les interfaces entre les milieux sont définies en reliant les données du modèle tous les 10 m par des portions de droite (pas d'utilisation de splines). Les solutions sont enregistrées en des capteurs espacés tous les 5 m le long de la topographie et l'on s'intéresse plus particulièrement à trois d'entre eux (référéncés R1, R2 et R3, figure 12) positionnés au rocher, à l'intérieur et en bord de bassin. L'onde plane incidente a les mêmes caractéristiques que pour le cas précédent. Pour cette étude, bien que les solutions soient plus complexes que pour le cas test précédent, nous avons choisi de présenter des résultats bruts n'ayant subi aucun traitement de type lissage.

On présente sur la figure 14 l'évolution de la vitesse horizontale  $v_x$  en fonction du temps, calculée aux récepteurs R1, R2 et R3 avec les méthodes GD (courbe bleue) et DF (courbe verte). Notons l'excellente concordance des résultats des deux méthodes numériques, bien que ce cas soit plus complexe que le précédent, ce qui prouve, tout d'abord, que l'utilisation de trois mécanismes, dans le cas de la méthode GD, permet une bonne précision dans cet intervalle de fréquences. On peut constater clairement, sur la solution au capteur R2, l'influence des ondes piégées dans le bassin qui résultent en un signal d'amplitude 60% supérieure à celle enregistrée en R1 (*Peak Ground Velocity*,  $PGV = 4.7 \times 10^{-2}$  m/s en R2 et  $PGV = 2.9 \times 10^{-2}$  m/s en R1) et de durée environ 3 fois plus longue, ce qui est une caractéristique typique des effets de site. En R3, l'amplitude est plus de deux fois plus élevée qu'en R1 ( $PGV = 6.6 \times 10^{-2}$  m/s) pour un signal de durée comparable ce qui provient de la position particulière de R3 combinant l'effet de la topographie et le bord du bassin où l'épaisseur des sédiments est faible. Notons, de plus, de légères différences entre les solutions GD et DF, pour R2, au-delà du temps  $t = 0.9$  s, imputables aux modèles numériques basés sur des maillages distincts (notamment aux interfaces entre les milieux) puisque les solutions en R1 et R3 sont en parfait accord. Enfin, on constate qu'en R1, c'est-à-dire assez loin du bassin, le signal enregistré est très proche de l'ondelette source (figure 5) avec un facteur 2 ; peu d'ondes sont diffractées par le bassin et le comportement en R1 est comparable à celui du rocher affleurant. Ceci valide l'application de conditions de périodicité sur les bords latéraux du domaine, y compris dans le cas 2D, puisque aucune onde ne revient des bords.

On présente, figure 15, les fonctions de transfert à la surface pour les méthodes GD et DF, c'est-à-dire le rapport spectral de la vitesse horizontale en fonction de la fréquence, pour tous les récepteurs en surface (ratios calculés par rapport à la réponse en surface d'un rocher homogène). On note tout d'abord que les résultats des deux méthodes (figures du haut) sont tout à fait comparables. Ensuite, en examinant ces fonctions de transfert, on constate une forte amplification (supérieure à 5) essentiellement dans le bassin à une fréquence d'environ 2 Hz, fréquence fondamentale de résonance liée à la présence de l'interface la plus marquée du milieu, en base de bassin. Cette fréquence évolue latéralement en raison de variations de la profondeur de l'interface sédiments-rocher. Une amplification forte (environ 6) à des fréquences plus élevées est observée à la partie droite du bassin (pour des coordonnées environ égales à 1500, en R3), c'est-à-dire pour les récepteurs situés au dessus de la couche sédimentaire la plus fine du bassin et à l'altitude la plus élevée. En R2, la présence du bassin sédimentaire se traduit par une amplification sismique importante (supérieure à 5) à une fréquence bien plus faible qu'en R3. Enfin, on présente également, figure 15 (en bas), l'erreur relative en % entre les deux méthodes sur les rapports d'amplifications calculés en chaque récepteur en fonction de la fréquence (normalisée par rapport à la moyenne des valeurs d'amplification). On constate que l'accord est globalement bon entre les

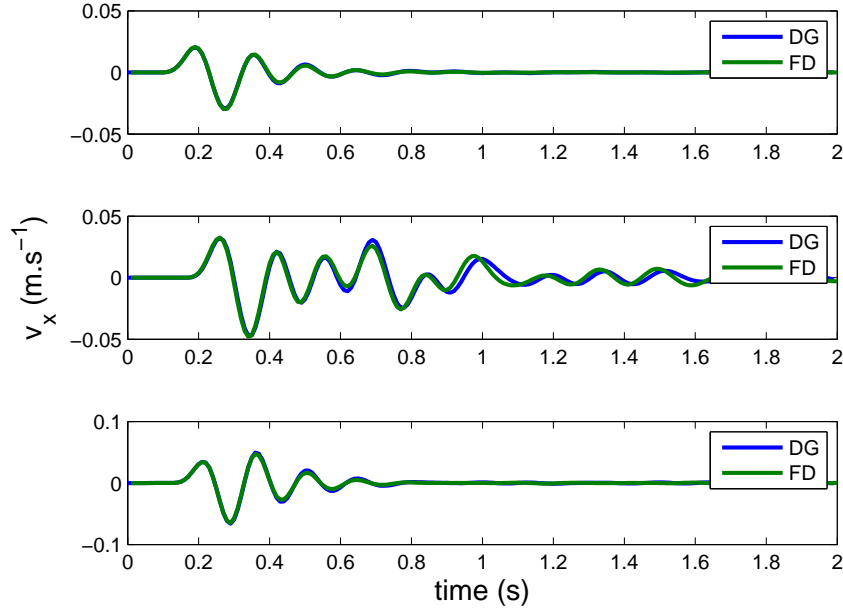


FIG. 14 – Evolution de la vitesse horizontale  $v_x$  en fonction du temps aux capteurs de surface R1 (figure du dessus), R2 (figure du milieu) et R3 (figure du bas). Comparaison entre les méthodes Galerkin discontinue (GD) et différences finies (DF).

deux méthodes, les différences sont très ponctuelles, essentiellement sur les bords du bassin, pour les fréquences les plus élevées et pour des faibles valeurs d'amplification : elles sont probablement dues, comme précédemment, aux différences des maillages notamment aux interfaces.

#### 4.2.2 Influence de l'hétérogénéité du bassin, effets 2D et comparaisons avec les mesures de terrain

Dans cette partie, on s'intéresse tout d'abord à l'étude de l'influence des hétérogénéités dans le bassin sur la réponse en surface. Pour cela, on considère le cas d'un bassin homogène ayant la même géométrie que celui étudié précédemment (interface bassin/rocher et topographie) mais dont le remplissage est constitué d'un seul milieu et dont les vitesses et la densité ont été fixées à des valeurs moyennes (données dans le tableau 3) par rapport au cas hétérogène précédent pour lequel le bassin comporte 9 milieux différents. Ici encore, on suppose que  $Q_P = v_p/10$  et  $Q_S = v_s/10$ .

	$v_p(f_r)$ (m/s)	$v_s(f_r)$ (m/s)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
bassin	730	300	2000
rocher	2450	1000	2100

TAB. 3 – Caractéristiques des matériaux pour le cas-test du bassin de Nice en version homogène. Les valeurs des vitesses correspondent à la fréquence de référence  $f_r = 1$  Hz.

De plus, on souhaite étudier les effets dus au caractère bidimensionnel du bassin en comparant les résultats obtenus en un point du bassin 2D (hétérogène et homogène) avec ceux issus de deux colonnes de sol dont les caractéristiques correspondent au sous-sol du bassin en ce point. Pour cette étude, on se place au point correspondant au capteur réel NLIB, dont la position est mentionnée sur le profil de la figure 12. Dans le cas du bassin hétérogène, la colonne de sol correspondante est détaillée figure 16 ; les références des milieux sont celles du bassin hétérogène du tableau 2. La colonne de sol associée au bassin homogène est monocouche et comprend le milieu du remplissage homogène (tableau 3) sur une épaisseur de 34 m et le rocher en profondeur.

On compare, figure 17, l'évolution de la vitesse horizontale  $v_x$  en fonction du temps calculée au capteur NLIB avec le méthode GD pour le bassin 2D hétérogène (figure du haut), la colonne 1D hétérogène (deuxième figure), le bassin 2D homogène (troisième figure) et la colonne 1D homogène (figure du bas). Les différentes configurations produisent des traces d'amplitude comparable. En revanche, la durée du signal dépend fortement du cas étudié. La colonne 1D homogène produit le signal le plus simple et de plus courte durée (jusqu'à  $t = 1.5$  s). Les cas hétérogènes produisent des traces plus complexes, jusqu'à des temps d'environ  $t = 2.5 - 3$  s, résultant des ondes constructives successives piégées dans le bassin ou la colonne hétérogène. Enfin, le cas du bassin homogène est celui pour lequel les vitesses sont enregistrées sur le temps le plus long (supérieur à  $t = 5$  s). En effet, les ondes piégées se réfléchissent aux bords du bassin avec beaucoup moins d'amortissement en raison de la présence d'un seul milieu dont le facteur de qualité est plus élevé que dans les couches indicées par 1, 3 et 5 du milieu hétérogène. D'autre part, il n'y a pas d'ondes converties ou réfléchies aux différentes interfaces susceptibles de disperser l'énergie du signal. Dans ce cas homogène, les résultats 1D et 2D sont très différents.

On trace, figure 18, les fonctions de transfert à la surface obtenues dans le cas du bassin homogène avec la méthode GD. On constate, tout d'abord, que ces résultats sont relativement comparables à ceux du cas hétérogène avec une amplification forte dans le bassin à une fréquence d'environ 2 Hz. En effet, la position du plus fort contraste de vitesse (interface rocher-sédiment) est la même. Les multiples réflexions sur les bords du bassin sont nettement visibles sur la figure (rappelons que les spectres n'ont subi aucun lissage). De plus, on constate de fortes amplifications à des fréquences élevées (supérieures à 10 Hz) qui sont le résultat du piégeage des ondes dans le bassin. Ceci n'est pas observé dans le cas hétérogène pour lequel la présence des interfaces contribue également à l'atténuation.

Enfin, pour terminer cette étude, on compare les résultats des différentes simulations (bassins et colonnes homogènes et hétérogènes) avec les mesures de terrain. Pour cela, on utilise les résultats d'une étude sur les effets de site à Nice (Oyomo Olinga [44]) utilisant les enregistrements en 6 stations du RAP (Réseau Accélérométrique Permanent) situées dans la ville, dont la station NLIB de notre profil. Pour chaque station, la méthode site sur référence a été utilisée pour mesurer l'amplification et la fréquence concernée. Ces résultats expérimentaux sont présentés sur la figure 19 (en haut à gauche) traçant le rapport spectral de la composante est-ouest de la vitesse mesurée en NLIB par rapport à une station de référence située au rocher (station NBOR, placée au Mont Boron). La courbe bleue est la moyenne calculée à partir de 14 séismes enregistrés entre janvier 2000 et octobre 2006, de magnitude entre 2.4 et 4.9. On constate une amplification d'environ 7.5 à la fréquence propre de 1.98 Hz. On compare également, figure 19 (en haut à droite), les résultats expérimentaux avec ceux issus des simulations dans le cas du bassin hétérogène. L'accord des résultats des méthodes GD et DF est excellent. On note toutefois de légères différences sur l'amplification qui concernent des fréquences ponctuelles et proviennent probablement, comme pour les courbes en temps, des maillages et de la position des interfaces. On peut constater que les simulations fournissent des résultats d'allure comparable aux mesures de terrain. L'amplification et la fréquence propre sont légèrement plus faibles pour les données numériques, comme on peut le constater sur le tableau 4. La différence d'amplitude peut



	Amplification	Fréquence (Hz)
Mesures de terrain	7.5	1.98
Bassin hétérogène	5.03	1.81
Bassin homogène	4.38	2.2
Colonne hétérogène	3.62	1.81
Colonne homogène	3.1	2.2

TAB. 4 – Amplification et fréquence propre des fonctions de transfert en NLIB pour les mesures de terrain et les simulations numériques.

s'expliquer par le choix de la station de référence (NBOR) utilisée pour le calcul site/référence. En effet, sur le terrain, le choix d'un site de référence ne produisant ni amplification ni dé-amplification n'est pas toujours simple et une étude récente par Bertrand *et al.* [4] a mis en évidence une dé-amplification en NBOR pouvant surestimer l'amplification déduite des mesures. Les deux figures du bas comparent les résultats 2D avec les colonnes correspondantes dans le cas hétérogène (figure de gauche) et homogène (figure de droite). On constate tout d'abord que, dans les deux cas, les colonnes 1D produisent des amplifications plus faibles et pour quelques fréquences seulement, omettant l'intervalle  $[2.5, 5]$  Hz. De plus, dans le cas homogène, les fréquences sont décalées vers des valeurs plus élevées. Dans le cas du bassin homogène, on constate des oscillations, visibles au-delà de 5 Hz, qui traduisent une atténuation plus faible que dans le cas hétérogène. A titre de remarque, les résultats de la colonne homogène sont en accord avec la fréquence propre attendue puisque dans un cas monocouche, comme ici, la fréquence de réponse est fonction de la vitesse  $v_s$  dans le milieu superficiel et de l'épaisseur de la couche  $f = v_s/4h = 2.2$  Hz. La plus grande proximité des résultats numériques avec les données observées étant obtenue avec un modèle hétérogène 2D, confirme l'intérêt d'utiliser des modèles bidimensionnels qui décrivent avec précision la topographie et le milieu en profondeur, en particulier les propriétés des différentes couches géologiques.

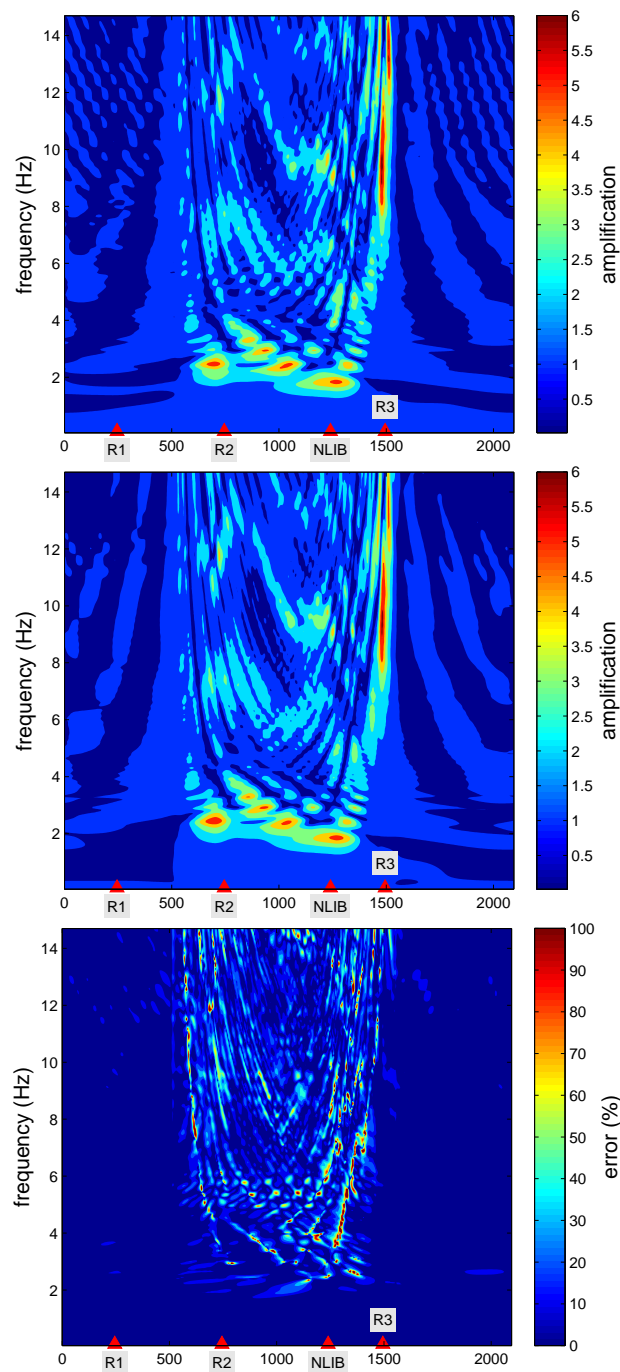


FIG. 15 – Fonctions de transfert de la vitesse horizontale  $v_x$  à la surface en fonction de la fréquence (figures du haut et du milieu). Ratios calculés par rapport au rocher homogène sans topographie; distance entre les récepteurs 5 m; résultats GD (en haut) et DF (au milieu). Erreur relative en % entre les fonctions de transfert des méthodes GD et DF (en bas),  $err = |ampli(GD) - ampli(DF)| / 0.5(ampli(GD) + ampli(DF))$ .

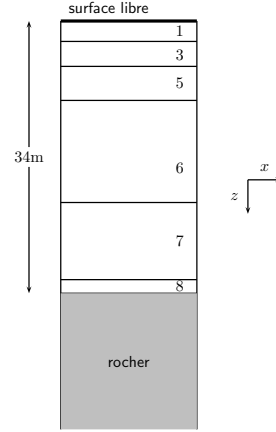


FIG. 16 – Colonne de sol 1D correspondant au sous-sol à la position du capteur NLIB dans le bassin hétérogène

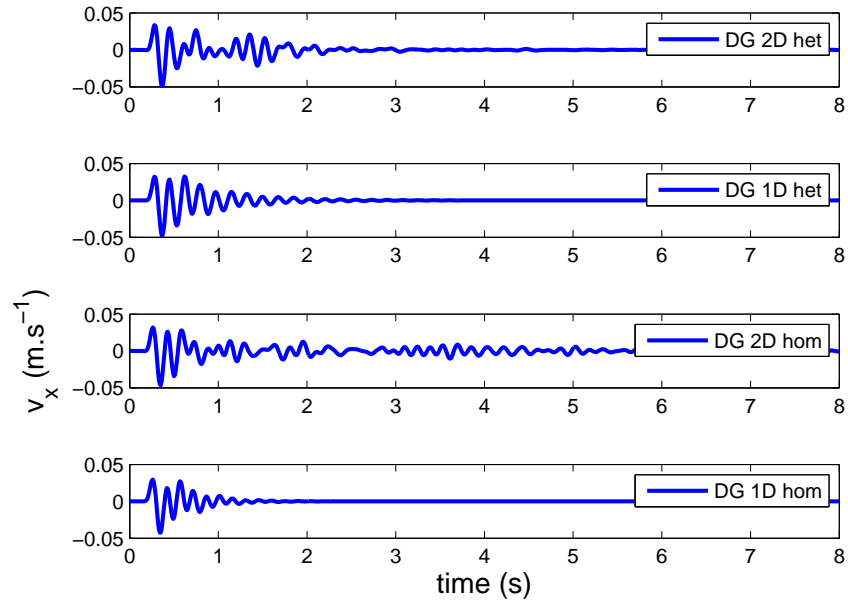


FIG. 17 – Evolution de la vitesse horizontale  $v_x$  en fonction du temps au capteur de surface NLIB. Comparaison entre les solutions obtenues pour le bassin 2D hétérogène (en haut), la colonne 1D hétérogène (deuxième figure), le bassin 2D homogène (troisième figure) et la colonne 1D homogène (en bas).

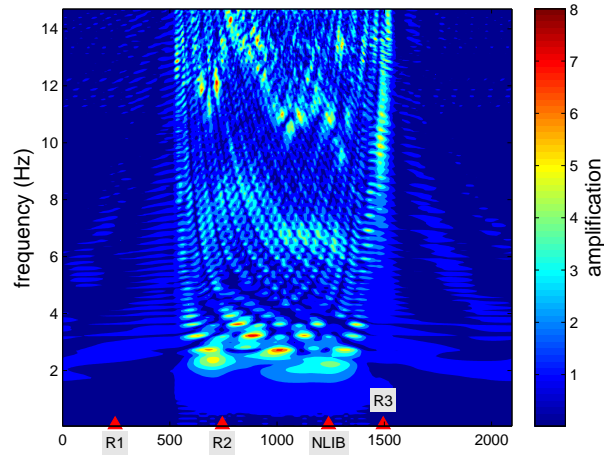


FIG. 18 – Fonctions de transfert de la vitesse horizontale  $v_x$  à la surface en fonction de la fréquence pour le bassin homogène avec obtenues avec la méthode Galerkin discontinue. Ratios calculés par rapport au rocher homogène sans topographie; distance entre les récepteurs 5 m. L'aspect haché de ces courbes est lié à l'absence de lissage sur les spectres de Fourier.

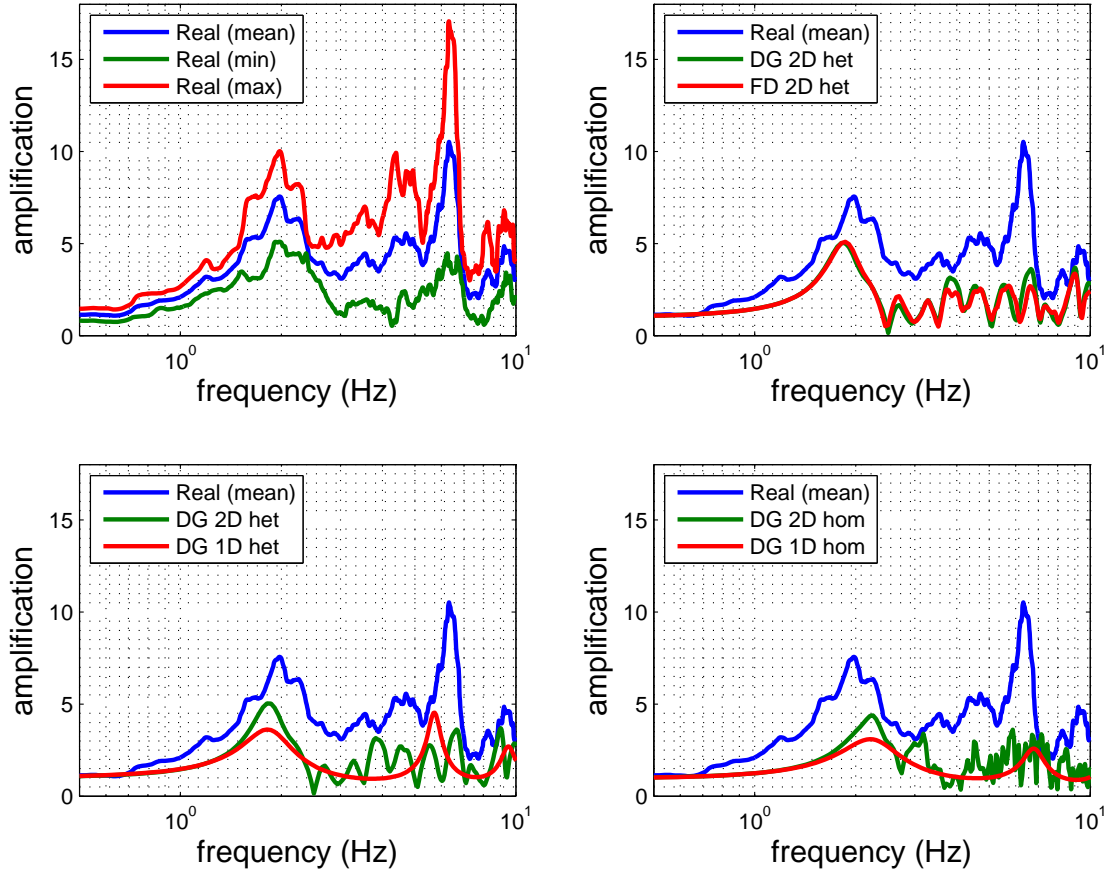


FIG. 19 – Fonctions de transfert à la station NLIB. En haut à gauche, rapports site/référence mesurés en la station NLIB, composante est-ouest, moyenne de 14 séismes en bleu, moyenne  $\pm$  écart-type en vert et rouge (d'après Oyomo Olinga [44]). En haut à droite, comparaison de la moyenne des mesures (en bleu) avec le résultat des simulations dans le bassin hétérogène (GD en vert, FD en rouge). En bas à gauche, comparaison de la moyenne des mesures (en bleu) avec les résultats des simulations dans le bassin hétérogène (en vert) et dans la colonne 1D hétérogène (en rouge). En bas à droite, comparaison de la moyenne des mesures (en bleu) avec les résultats des simulations dans le bassin homogène (en vert) et dans la colonne 1D homogène (en rouge).

## 5 Conclusion

Nous avons présenté une méthode d'éléments finis Galerkin discontinue pour la propagation d'ondes sismiques dans un milieu viscoélastique bidimensionnel. La prise en compte de l'atténuation est basée sur un modèle de Maxwell généralisé ainsi que sur un facteur de qualité supposé constant sur l'intervalle de fréquence considéré pour nos applications, suivant l'approche proposée par Emmerich et Korn [16]. Cette méthode a été validée par comparaison avec une méthode en différences finies en considérant deux applications : la propagation dans une colonne de sol hétérogène et un cas plus réaliste, dans un bassin sédimentaire avec topographie non plane.

Premièrement, nous avons étudié la propagation d'une onde plane SV dans une colonne de sol 1D ayant des propriétés réalistes. Ce cas test simple a permis une validation de la méthode GD, dans le cas élastique et viscoélastique ainsi qu'une comparaison très précise des deux méthodes au regard notamment des fonctions de transfert. L'impact du nombre de mécanismes utilisés ainsi que la fréquence de référence ont été étudiés. Nous pouvons tout d'abord conclure que le nombre de mécanismes choisis dépend de l'intervalle de fréquences d'intérêt puisque les différences entre les solutions obtenues pour 3 et 8 mécanismes, bien que minimes, apparaissent essentiellement aux modes supérieurs, pour les fréquences les plus élevées. Pour des applications plus complexes, nécessitant des maillages fins et donc plus d'inconnues ou pour une extension à trois dimensions d'espace, l'utilisation de 3 mécanismes seulement peut représenter un net gain en temps de calcul et en espace mémoire sans dégrader la qualité des solutions. Ensuite, nous avons illustré l'importance de la fréquence de référence pour limiter la dispersion ou comparer les résultats issus de plusieurs méthodes. Le choix par défaut d'une fréquence de référence fixée à 1 Hz peut avoir un impact non négligeable notamment à des fréquences élevées.

Pour la deuxième application numérique, nous nous sommes intéressés à un cas plus complexe et plus réaliste de propagation dans un bassin 2D, profil extrait d'un modèle 3D de la ville de Nice. Pour représenter le modèle, nous avons construit un maillage triangulaire non structuré incluant la géométrie du bassin, la topographie ainsi que les interfaces entre les différents milieux ; l'utilisation de triangles de plus grande taille dans le rocher a permis de limiter le nombre total d'éléments du maillage. Ces simulations ont permis de mettre en évidence une forte amplification dans le bassin. Les résultats obtenus par la méthode GD sont tout à fait comparables à ceux issus de la méthode DF, les quelques différences pouvant être attribuées aux disparités entre le maillage éléments finis et la grille cartésienne, notamment au niveau des interfaces et l'absence des lissage des interfaces avec les DF contrairement au maillage triangulaire utilisant des splines lors de la définition des interfaces entre milieux. Des simulations ont également été réalisées sur une géométrie identique de bassin mais pour un remplissage homogène, mettant en évidence l'importance des différents milieux constitutifs du bassin et pas seulement sa géométrie. En effet, dans le cas hétérogène, les signaux enregistrés en surface sont le résultat de l'atténuation intrinsèque de chaque milieu mais également des conversions et diffractions successives aux interfaces entre matériaux, ce qui se traduit, dans le cas homogène, par des signaux de durée plus longue et des amplifications plus élevées à haute fréquence. Les résultats dans le bassin 2D ont également été comparés aux solutions 1D obtenues en surface de colonnes homogène ou hétérogène ayant les mêmes propriétés en profondeur. Si la fréquence propre des colonnes est proche du cas 2D associé, on ne retrouve ni les amplitudes, ni les modes supérieurs, ce qui prouve l'apport d'une modélisation bidimensionnelle. Enfin, les résultats de ces différentes simulations ont été comparés aux mesures de terrain au capteur NLIB du réseau RAP, présent sur notre profil. Les solutions calculées dans le cas du bassin hétérogène sont les plus proches des enregistrements de terrain aussi bien pour l'amplification que pour les fréquences correspondantes, ce qui peut s'expliquer par le caractère relativement bidimensionnel de la géométrie 3D du bassin en cet endroit.

Notre objectif est d'étendre cette étude au cas de milieux tridimensionnels afin de compléter

cette étude comparative des effets 1D et 2D par l'apport des résultats sur une géométrie réaliste 3D.

## Remerciements

Les auteurs remercient le CETE Méditerranée - LRPC de Nice et plus particulièrement Etienne Bertrand pour leur avoir fourni le modèle géotechnique de Nice ainsi que les résultats des traitements des données du RAP. Fabien Peyrusse bénéficie d'un financement de thèse de l'Ifsttar et de la Région Provence-Alpes-Côte d'Azur.

## Références

- [1] K. Aki and P.G. Richards. *Quantitative Seismology, Second Edition*. University Science Books, Sausalito, California, 2002.
- [2] R. Benites and K.B. Olsen. Modeling Strong Ground Motion in the Wellington Metropolitan Area, New Zealand. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 97 :2180–2196, 2005.
- [3] E. Bertrand, A.-M. Duval, M. Castan, and S. Vidal. 3D geotechnical soil model of Nice, France, inferred from seismic noise measurements for seismic hazard assessment. *AGU Fall Meeting, San Francisco*, 2007.
- [4] E. Bertrand, J. Régner, F. Vinatier, P. Langlaude, and M. Pernoud. Seismological measurements for site effect investigation in Nice, France. *15 WCEE, 15th World Conference on Earthquake Engineering, Lisbon, Portugal*, 2012.
- [5] T. Bohlen and H. K. Saenger. Accuracy of heterogeneous staggered-grid finite-difference modelling of Rayleigh waves. *Geophysics*, 71(4) :109–115, 2006.
- [6] K.W. Campbell. Estimates of Shear-Wave  $Q$  and  $\kappa_0$  for Unconsolidated and Semiconsolidated Sediments in Eastern North America. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 99(4) :2365–2392, 2009.
- [7] J. M. Carcione, D. Kosloff, and R. Kosloff. Wave propagation simulation in a linear viscoacoustic medium. *Geophys. J.*, 93 :393–407, 1988.
- [8] J. M. Carcione, D. Kosloff, and R. Kosloff. Wave propagation simulation in a linear viscoelastic medium. *Geophys. J.*, 95 :597–611, 1988.
- [9] E. Chaljub, Y. Capdeville, and J.P. Vilotte. Solving elastodynamics in a fluid-solid heterogeneous sphere : a parallel spectral element approximation on non-conforming grids. *J. Comp. Phy.*, 187(2) :457–491, 2003.
- [10] E. Chaljub, P. Moczo, S. Tsuno, P.-Y. Bard, J. Kristek, M. Käser, M. Stupazzini, and M. Kristekova. Quantitative Comparison of Four Numerical Predictions of 3D Ground Motion in the Grenoble Valley, France. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 100(4) :1427–1455, 2010.
- [11] S. M. Day. Efficient simulation of constant  $Q$  using coarse-grained memory variables. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 88 :1051–1062, 1998.
- [12] S. M. Day and C. R. Bradley. Memory efficient simulation of anelastic wave propagation. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 91 :520–531, 2001.
- [13] S. M. Day and J. B. Minster. Numerical simulation of attenuated wavefields using a Padé approximant method. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 78 :105–118, 1984.
- [14] S. Delcourte, L. Fezoui, and N. Glinsky-Olivier. A high-order discontinuous Galerkin method for the seismic wave propagation. In *ESAIM : Proceedings*, pages 70–89, 2009.
- [15] Distene. Simail software. <http://www.distene.com/fr/create/simail.html>.
- [16] H. Emmerich and M. Korn. Incorporation of attenuation into time-domain computations of seismic wave fields. *Geophysics*, 52 :1252–1264, 1987.
- [17] V. Etienne, E. Chaljub, J. Virieux, and N. Glinsky. An hp-adaptive discontinuous Galerkin finite-element method for 3D elastic wave modelling. *Geophys. J. Int.*, 183(2) :941–962, 2010.
- [18] A. Gandomzadeh. *Interaction dynamique sol-structure : influence des non-linéarités de comportement du sous-sol*. PhD thesis, IRSN-LCPC, Université Paris Est, 2011.
- [19] W. W. Garvin. Exact transient solution of the buried line source problem. *Proc. Roy. Soc. London, Series A*, 234 :528–541, 1956.



- [20] C. Gélis and L. F. Bonilla. 2-D P-SV numerical study of soil-source interaction in a non-linear basin. *Geophys. J. Int.*, 191 :1374–1390, 2012.
- [21] C. Gélis, L.F. Bonilla, J. Regnier, E. Bertrand, and A.-M. Duval. On the use of Saenger’s finite difference stencil to model 2D P-SV non linear basin response : application to Nice, France. In *Seismik Risk 2008 - Earthquake in Western Europe, Liège*, 2008.
- [22] R. W. Graves and S. M. Day. Stability and accuracy analysis of coarse-grain viscoelastic simulations. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 93 :283–300, 2003.
- [23] R. Guidotti, M. Stupazzini, C. Smerzini, R. Paolucci, and P. Ramieri. Numerical study on the role of basin geometry and kinematic seismic source in 3D ground motion simulation of the Mw 6.3 Christchurch earthquake on February 21st, 2011, New Zealand. *Seismol. Res. Lett.*, 82(6) :767–782, 2011.
- [24] N. A. Haskell. The dispersion of surface waves on multilayered media. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 43(1) :17–34, 1951.
- [25] M. Käser and M. Dumbser. An arbitrary High Order Discontinuous Galerkin Method for Elastic Waves on Unstructured Meshes – I. the two-Dimensional Isotropic Case with External Source Term. *Geophys. J. Int.*, 166(2) :855–877, 2006.
- [26] M. Käser, M. Dumbser, J. de la Puente, and H. Igel. An arbitrary High Order Discontinuous Galerkin Method for Elastic Waves on Unstructured Meshes – III. Viscoelastic attenuation. *Geophys. J. Int.*, 168 :224–242, 2007.
- [27] M. Käser, V. Hermann, and J. de la Puente. Quantitative Accuracy Analysis of the Discontinuous Galerkin Method for Seismic Wave Propagation. *Geophys. J. Int.*, 173(2) :990–999, 2008.
- [28] K. Kelly, R. Ward, S. Treiten, and R. Alford. Synthetic seismograms : a finite-difference approach. *Geophysics*, 41(1) :2–27, 1976.
- [29] E. Kjartansson. Constant Q-Wave Propagation and Attenuation. *J. Geophys. Res.*, 84(B9) :4737–4748, 1979.
- [30] D. Komatitsch, Q. Liu, J. Tromp, P. Suess, C. Stidham, and J.H. Shaw. Simulations of ground motion in the Los Angeles Basin based upon the Spectral-Element Method. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 94(1) :187–206, 2004.
- [31] D. Komatitsch and J.P. Vilotte. The spectral-element method : an efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 88(2) :368–392, 1998.
- [32] A.O.L. Kwok, J.P. Stewart, Y.M.A. Hashash, N. Matasovic, R. Pyke, Z. Wang, and Z. Yang. Use of exact solutions of wave propagation problems to guide implementation of nonlinear seismic ground response analysis procedure. *J. Geotech. Geoenviron. Eng.*, 133(11) :1385–1398, 2007.
- [33] S.J. Lee, D. Komatitsch, B.S. Huang, and J. Tromp. Effects of Topography on Seismic Wave Propagation : An Example from Northern Taiwan. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 99(1) :314–325, 2009.
- [34] A. Levander. Fourth-order finite difference P-SV seismograms. *Geophysics*, 53 :1425–1436, 1988.
- [35] P. C. Liu and R. J. Archuleta. Efficient modeling of Q for 3D numerical simulation of wave propagation. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 96(4A) :1352–1358, 2006.
- [36] J. Lysmer and L.A. Drake. *A finite element method for seismology*. B.A. Bolt, ed., Methods of Computational Physics, 11, Academic Press, New York, pp 181-216, 1972.

- [37] R. Madariaga. Dynamics of an expanding circular fault. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 66 :639–666, 1976.
- [38] K.J. Marfurt. Accuracy of finite-difference and finite-element modelling of the scalar and elastic wave equations. *Geophysics*, 49 :533–549, 1984.
- [39] D.E. Mercerat, J.P. Vilotte, and F.J. Sanchez-Sesma. Triangular Spectral Element simulations of 2D elastic wave propagation using unstructured grids. *Geophys. J. Int.*, 166 :679–698, 2006.
- [40] P. Moczo, E. Bystrický, J. Kristek, J. M. Carcione, and M. Bouchon. Hybrid modeling of P-SV seismic motion at inhomogeneous viscoelastic topographic structures. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 87 :1305–1323, 1997.
- [41] P. Moczo and J. Kristek. On the rheological models used for time-domain methods of seismic wave propagation. *Geophys. Res. Lett.*, 32 :L01306, 2005.
- [42] P. Moczo, J. Kristek, and L. Halada. *The finite-difference method for seismologists. An introduction*. Comenius University, Bratislava, 2004.
- [43] T. Ohminato and B.A. Chouet. A free-surface boundary condition for including 3D topography in the finite-difference method. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 87(2) :494–515, 1997.
- [44] M. Oyomo Olinga. Estimation des effets de site à Nice. Technical report, Université de Nice Sophia Antipolis, 2007.
- [45] K.B. Olsen and R.J. Archuleta. 3D Simulation of Earthquakes on the Los Angeles Fault System. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 86 :575–596, 1996.
- [46] W. H. Reed and T. R. Hill. Triangular mesh methods for the neutron transport equation. Technical report, Los Alamos Scientific Laboratory, 1973.
- [47] J.O.A. Robertsson. A numerical-free surface condition for elastic/viscoelastic finite-difference modeling in the presence of topography. *Geophysics*, 61(6) :1921–1934, 1996.
- [48] E. H. Saenger, N. Gold, and S. A. Shapiro. Modeling the propagation of elastic waves using a modified finite-difference grid. *Wave Motion*, 31 :77–92, 2000.
- [49] T. Satoh, H. Kawase, T. Sato, and A. Pitarka. Three-Dimensional Finite-Difference Waveform Modeling of Strong Motions Observed in the Sendai Basin, Japan. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 91 :812–825, 2001.
- [50] J.-F. Semblat. Rheological interpretation of Rayleigh damping. *Journal of Sound and Vibration*, 206(5) :741–744, 1997.
- [51] J.-F. Semblat, A.-M. Duval, and P. Dangla. Numerical analysis of seismic wave amplification in Nice (France) and comparisons with experiments. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 19(5) :347–362, 2000.
- [52] J.-F. Semblat and A. Pecker. *Waves and vibrations in soils*. IUSS Press, Pavia, Italy, 2009.
- [53] S. K. Singh, E. Mena, and R. Castro. Some aspects of source characteristics of the 19 September 1985 Michoacan earthquake and ground motion amplification in and near Mexico city from strong motion data. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 78 :451–477, 1988.
- [54] C. Smerzini, R. Paolucci, and M. Stupazzini. Comparison of 3D, 2D and 1D numerical approaches to predict long period earthquake ground motion in the Gubbio plain, Central Italy. *Bull. of Earthquake Eng.*, 9(6) :2007–2029, 2011.
- [55] M. Stupazzini, R. Paolucci, and H. Igel. Near-fault earthquake ground-motion simulation in the Grenoble valley by high-performance spectral-element code. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 99(1) :286–301, 2009.

- [56] W.T. Thomson. Transmission of elastic waves through a stratified solid medium. *J. Appl. Phys.*, 21 :89–93, 1950.
- [57] J. Virieux. P-SV wave propagation in heterogeneous media : velocity-stress finite-difference method. *Geophysics*, 51 :889–901, 1986.
- [58] K. Yee. Numerical solution of initial boundary value problem involving Maxwell’s equation in isotropic media. *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, 83 :302–307, 1966.
- [59] J. Zahradnik, P. Moczo, and F. Hron. Testing for elastic finite-difference schemes for behaviour at discontinuities. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 83(1) :107–129, 1993.

## Annexe : Caractéristiques de la méthode différences finies

Les résultats de la méthode Galerkin discontinu sont comparés à ceux d'une méthode différences finies (Gélis *et al.*, 2005), basée sur le stencil de Saenger *et al.* [48], pour lequel les dérivées spatiales sont approximées par un développement de Taylor à l'ordre 1 calculé selon des axes tournés à  $45^\circ$  par rapport au repère cartésien, contrairement à la méthode initiale (Virieux [57]) exprimant les dérivées spatiales dans la direction des axes. Dans les deux cas, les méthodes sont basées sur des schémas dits *staggered* (en quinconce), à la différence des approches classiques pour lesquelles toutes les variables sont exprimées en une seule grille de calcul.

De plus, les composantes du tenseur des contraintes et celles du vecteur vitesse (voir fig. 20) sont calculées en un seul point de la grille numérique, ce qui évite les moyennes spatiales des propriétés du milieu (la masse volumique  $\rho$  ainsi que les coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ ). La surface libre est introduite par les conditions de vacuum (Zahradnik *et al.* [59]). Cette méthode a été validée (Gélis *et al.*, 2005) par comparaison aux solutions analytiques du cas test de Garvin [19], ce qui prouve une modélisation correcte des ondes de surface.

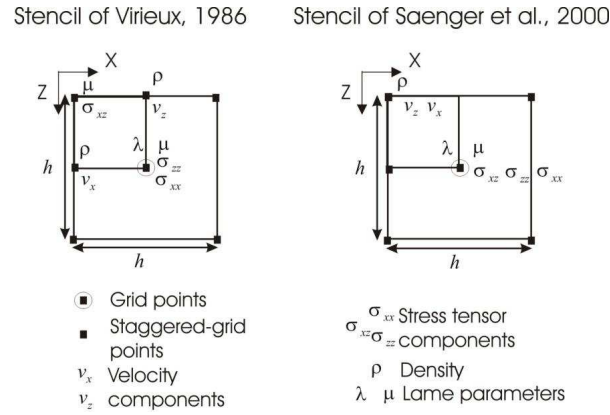


FIG. 20 – Comparaison entre le stencil de différences finies de Virieux (à gauche) et de Saenger *et al.* (à droite).

Dans le cas d'un milieu sans surface libre, comme le montrent Saenger *et al.* [48], le nombre de points par longueur d'onde minimale est d'environ 10 avec le stencil de Virieux et 14 avec le stencil de Saenger. Bohlen et Saenger (2006) [5] estiment que 15 à 30 points par longueur d'onde minimale sont nécessaires pour que la dispersion numérique devienne négligeable en présence d'une topographie plane horizontale. Lorsque la topographie est non plane, ce nombre de points minimum atteint la valeur de 60. Pour cette raison, 60 points par longueur d'onde ont été utilisés dans les applications.

Les pertes anélastiques sont modélisées par la technique de Liu and Archuleta (2006) [35] qui prend en compte l'atténuation anélastique par l'intermédiaire de 8 mécanismes de relaxation, auxquels sont attachés, en chaque point de la maille numérique, des variables mémoire. De ce fait, les effets de  $Q$  en termes d'atténuation et de dispersion sont approximés par un jeu de fonctions de relaxation. Chacune est régie par une équation différentielle du premier ordre en temps, suivant Day et Minster [13], Emmerich et Korn [16] et Day [11]. La combinaison linéaire des fonctions de relaxation représente la réduction du module de rigidité du milieu depuis un module non relaxé à un temps nul jusqu'à un module relaxé à un temps infini, répondant ainsi à la définition de la viscoélasticité (pertes anélastiques). Le comportement de chaque fonction de relaxation

est simplement contrôlé par un poids et un temps de relaxation. Ces temps de relaxation sont espacés de manière à couvrir l'intervalle de fréquence cible et sont espacés logarithmiquement dans cet intervalle. Plus le nombre de temps de relaxation est élevé, plus la modélisation de  $Q$  en fonction de la fréquence est précise. Cependant, le nombre de temps de relaxation différents est directement proportionnel au nombre de variables de mémoire; cette proportionnalité affecte directement le coût de calcul et les besoins de mémoire des méthodes numériques.

Afin de limiter le coût de calcul et les besoins de stockage mémoire, Day et Bradley [12] ont développé une technique pour prendre en compte l'atténuation anélastique adaptée aux méthodes de différences finies : un seul mécanisme sur les 4 (en 2D) ou les 8 (en 3D) mécanismes utilisés est pris en compte par point de la grille numérique. L'échelle de variation spatiale de ces mécanismes est beaucoup plus courte que celle des propriétés physiques du milieu puisque 2 points situés côte à côte n'ont pas le même temps de relaxation (d'où le nom de technique *coarse-grained*). Cependant, Graves et Day [22] ont montré que, pour les faibles valeurs de  $Q$ , ce calcul introduit des variations artificielles des propriétés du milieu et entraîne une diminution de la précision numérique. Ils proposent d'effectuer des moyennes harmoniques locales en utilisant les points de la grille de variation des mécanismes.

Pour prendre en compte la viscoélasticité, Liu et Archuleta [35] n'utilisent pas de grille rapide où les mécanismes de relaxation évoluent spatialement. Dans cette formulation adaptée pour des méthodes numériques de type éléments finis, 8 mécanismes sont introduits par point de la grille numérique. Ils proposent un jeu de paramètres définissant les temps de relaxation choisis de sorte que des facteurs de qualité allant de 5 à 5000 soient considérés comme constants dans une gamme de fréquence de 0.01 à 50 Hz correspondant à la gamme de fréquence généralement utilisée en sismologie.



**RESEARCH CENTRE  
SOPHIA ANTIPOLIS – MÉDITERRANÉE**

2004 route des Lucioles - BP 93  
06902 Sophia Antipolis Cedex

Publisher  
Inria  
Domaine de Voluceau - Rocquencourt  
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex  
[inria.fr](http://inria.fr)

ISSN 0249-6399